

**Flächenschränken  
für MST Einbettungen  
in der Euklidischen Ebene**

**Till Bruckdorfer**

**Diplomarbeit**

zur Erlangung des Grades eines Diplom-Informatikers  
des Wilhelm-Schickard-Instituts für Informatik  
der Universität Tübingen

Betreuer: Prof. Dr. Michael Kaufmann

Tübingen, 26. September 2010



## **Erklärung**

Ich erkläre hiermit, diese Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt zu haben.

Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, wurden durch Angabe der Quellen kenntlich gemacht und von mir übersetzt.

Tübingen, den 26. September 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1	Graph und Baum . . . . .	4
2.2	Minimaler Spannbaum . . . . .	5
2.3	Graphenklassen . . . . .	6
2.4	Euklidische Ebene . . . . .	8
2.5	Einbettung . . . . .	10
2.6	Orientierung . . . . .	10
2.7	Trigonometrische Formeln . . . . .	11
2.8	Landau-Schreibweise . . . . .	12
2.9	Flächenschränken . . . . .	13
2.10	MST-Einbettung eines Baumes . . . . .	14
<b>3</b>	<b>MST-Einbettungen</b>	<b>15</b>
3.1	MST-Einbettungen in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ . . . . .	15
3.2	MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad zwei . . . . .	16
3.3	MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad drei . . . . .	17
3.4	MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad vier . . . . .	20
3.5	MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad fünf . . . . .	24
3.6	MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad sechs oder größer . . . . .	26
3.7	MST-Einbettung einer Raupe . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Hilfssätze</b>	<b>28</b>
4.1	Häufig auftretende Konstellationen . . . . .	28
4.2	Beschränkung der Länge von Kanten . . . . .	37
4.3	Beschränkung der Größe von Winkeln . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Flächenschränken für 5-reguläre Bäume</b>	<b>55</b>
5.1	Untere Flächenschränke . . . . .	55
5.2	Obere Flächenschränke . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Verfeinerung der Flächenschränke</b>	<b>62</b>
6.1	Verfeinerung der Beschränkung von Winkelgrößen . . . . .	62
6.2	Verfeinerung des Beschränkungsfaktors der Kantenlängen . . . . .	67
6.3	Verfeinerung der unteren Flächenschränke . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>70</b>
<b>8</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>73</b>
<b>9</b>	<b>Anhang – Wertetabellen</b>	<b>74</b>

# 1 Einleitung

In der Informatik werden im Bereich des Graphenzeichnens<sup>1</sup> strukturelle Beziehungen von Objekten gezeichnet. Die Objekte mit ihren Beziehungen sind als Graph modelliert. Zunächst ist ein Graph ein rein theoretische Modell und bekommt durch Visualisierung mit einer Zeichnung eine deutlich größere Übersichtlichkeit. In der Zeichnung können gewisse Eigenschaften, wie zum Beispiel die kürzeste Distanz zwischen zwei Objekten, besser beobachtet werden. Wird ein Punkt in der Zeichnung verschoben, kann sich dies auf eine Änderung des zugrundeliegenden Graphen auswirken. Weil eine Zeichnung immer mit Algorithmen angefertigt wird, deren Eingabe ein Graph ist, kann durch Variation der Eingabe die Änderung des Objektes beobachtet werden. Dies ist zum Beispiel wichtig, wenn die genauen Positionen von definierenden Punkten der Zeichnung unbekannt, aber Bereiche, in denen diese Punkte liegen müssen, bekannt sind.

Es gibt Visualisierungen mit einem zugrundeliegenden Graphen, in welchen die Verschiebung eines Punktes in der Zeichnung den Graphen deutlich verändert. Noch stärker kann sich der Graph verändern, wenn mehr als ein Punkt verschoben wird. Allerdings muss sich der zugrundeliegende Graph bei der Verschiebung eines Punktes oder mehrerer Punkte nicht zwingend ändern. Ein Beispiel für einen solchen Graphen ist ein minimaler Spannbaum.

Ein „minimaler Spannbaum“ (MST) einer Menge von Knoten ist ein Baum minimalen Gewichts, der die Knoten verbindet. Als Gewicht wird in dieser Arbeit immer die Euklidische Distanz der Knoten betrachtet. Berechnungen von MSTs werden häufig zur Optimierung von Lastenverteilung in Netzwerken genutzt. Dabei entspricht der Standort eines Rechners jeweils einem Knoten im Modell. Wird der Netzwerkfluss über die kürzesten Verbindungen von Rechnern verteilt, entsprechen die genutzten Verbindungen gerade den Kanten in einem MST. Der Standort eines Rechners befindet sich dann in einem Bereich, in welchem sich bei Verschiebung des Rechners der zugrunde liegende MST nicht ändert. Im Allgemeinen befinden sich die Rechner auf einer Ebene<sup>2</sup> und sollen innerhalb einer möglichst kleinen Fläche platziert werden. Man muss den Platzbedarf also im Auge behalten.

Unter „Flächenschränken“ versteht man den minimalen bzw. maximalen Platzbedarf eines Graphen, der beispielsweise durch eine MST-Einbettung in der Euklidischen Ebene entsteht. Als „MST-Einbettung eines Baumes“ bezeichnet man die Konstruktion einer Zeichnung eines MSTs aus der Knotenmenge eines gegebenen Baumes, sodass der MST und der gegebene Baum die gleiche Struktur haben. Hierbei müssen die Nebenbedingungen für die Platzierung der

---

<sup>1</sup>Die Beschreibung dieses Bereichs ist aus [KW, S.1] entnommen.

<sup>2</sup>Die Höhenlage der Rechner wird bei einer Distanzbetrachtung vernachlässigt.

eingebetteten Knoten des Baumes berücksichtigt werden. Diese sind wichtig für die Konsistenz eines MST.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Nebenbedingungen und ihre Konsequenzen für die Zeichnung eines Baumes untersucht. Dabei werden Rückschlüsse auf die erlaubten Platzierungsbereiche für Punkte in der Euklidischen Ebene gezogen.

Nachdem in Kapitel 2 Grundlagen eingeführt werden, ist in Kapitel 3 zunächst beschrieben, wie MST-Einbettungen von Bäumen mit maximalem Knotengrad zwei, drei und vier konstruiert werden. Sowohl für Bäume mit maximalem Knotengrad zwei, drei, als auch vier ist der Platzbedarf polynomiell beschränkt. Außerdem wird in Kapitel 3 ein Konstruktions-Algorithmus für eine MST-Einbettung von Bäumen mit maximalem Knotengrad fünf vorgestellt. Diese MST-Einbettungen sind allerdings exponentiell beschränkt, nämlich durch  $2^{O(n^2)}$ . Bäume mit maximalem Knotengrad sechs können im Allgemeinen nicht als MST eingebettet werden. Es gibt aber Ausnahmen. Lässt sich ein Baum von Grad sechs als MST einbetten, so kann man diesen Baum auch in einen Baum von Grad fünf überführen. Für Bäume mit maximalem Knotengrad sieben oder noch größer wurde bereits bewiesen, dass es in der Euklidischen Ebene keine MST-Einbettung gibt.

In Kapitel 4 werden Hilfssätze vorgestellt und bewiesen anhand derer in Kapitel 5 bewiesen wird, dass eine spezielle Graphenklasse mit maximalem Knotengrad fünf tatsächlich nur mit exponentiellem Platzbedarf als MST eingebettet werden kann. Dies war bisher noch nicht bekannt im Gegensatz zu den Ergebnissen in Kapitel 3. Bei der in Kapitel 5 untersuchten speziellen Graphenklasse handelt es sich um eine Teilmenge der 5-regulären Bäume. Sie sind zusammengesetzt aus vollständigen 5-regulären Bäumen der Tiefe vier und daran anschließenden sogenannten 5-regulären Raupen an jedem Blatt. Die Bäume dieser Graphenklasse benötigen mindestens  $2^{\Omega(n)}$  Platz.

Kapitel 6 verschärft Beschränkungs faktoren von Längen und Winkeln, sodass in diesem Kapitel die untere Platzschanke  $2^{\Omega(n^2)}$  bewiesen wird. Zusammen mit dem Konstruktions-Algorithmus aus Kapitel 3 ist die hier betrachtete Graphenklasse als MST mit Platzbedarf  $2^{\Theta(n^2)}$  einzubetten.

Der maximale Knotengrad eines Baumes entscheidet über den minimalen Platzbedarf der MST-Einbettung. In Kapitel 5 wird bewiesen, dass die Grenze zwischen polynomielltem Platzbedarf und exponentiellem Platzbedarf genau zwischen maximalem Knotengrad vier und fünf liegt. Zunächst wird ein vollständiger 5-regulärer Baum betrachtet und dann argumentiert, dass ein Pfad von der Wurzel dieses Baumes bis zu einem Knoten der Tiefe vier existiert, bei dem die beiden an der nächsten Kante anliegenden Winkel eine gewisse Größe nicht mehr überschreiten. Hier setzt eine angehängte 5-reguläre Raupe den Baum fort. Die erste Kante und ihre zwei anliegenden Winkel am Anfang der Rau-

pe bestimmen durch ihre Größe unter Anwendung der Hilfssätze alle weiteren Winkelgrößen und Kantenlängen bei der Traversalion der Raupe. Durch die Einteilung in zwei Fallgruppen, die iterativ beim Durchlauf der Raupe angewendet werden können, werden sämtliche Möglichkeiten der Fortsetzung dieser Raupe in Betracht gezogen. Die Lemmata über geometrische Anordnungen beweisen, dass die Schranken für die Winkel nicht mehr über- oder unterschritten werden, und dass der Faktor für die Längenbeschränkung anschließender Kanten deutlich unter 1 liegt.

Aus diesem Grund können Bäume aus dieser Klasse als MST nicht mit polynomiellem Platzbedarf gezeichnet werden und haben mindestens einen Platzbedarf von  $2^{\Omega(n)}$ . Die Anzahl der Knoten aus den oberen Ebenen des vollständigen 5-regulären Baumes ist bei Fixierung der Tiefe konstant und kann daher in der Landau-Schreibweise vernachlässigt werden.

In Kapitel 6 werden die Schranken für Längen und Winkel noch genauer bestimmt, sodass bei gleichem Beweisverlauf wie in Kapitel 5 gezeigt wird, dass der Platzbedarf sogar mindestens quadratisch exponentiell ist; er beträgt jetzt

$$2^{\Omega(n^2)}.$$



## 2 Grundlagen

### 2.1 Graph und Baum

Die folgende Definition ist aus [CO, S.1080ff] entnommen und führt die für diese Arbeit wichtigsten Begriffe ein.

**Definition 2.1.** Ein *gerichteter Graph*  $G = (V, E)$  ist ein Paar bestehend aus einer endlichen Menge  $V$  und einer binären Relation  $E \subseteq V \times V$  auf  $V$ . Die Elemente von  $V$  werden *Knoten* genannt, die Elemente von  $E$  *Kanten*. Ein Graph heißt *ungerichtet*, falls jedes Element von  $E$  eine zweielementige Teilmenge von  $V$  ist. Also enthält  $E$  nur ungeordnete Paare. Im Folgenden werden nur ungerichtete Graphen betrachtet. Der Einfachheit halber werden die Kanten als Paar geschrieben.

Ein *Pfad*  $p$  der Länge  $k$  von einem Knoten  $w$  hin zu einem Knoten  $w'$  ist eine Folge von Knoten  $v_0, \dots, v_k$  mit den Eigenschaften  $v_0 = w$ ,  $v_k = w'$  und  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  für  $i = 1, \dots, k$ . Durch  $w$  und  $w'$  wird auf einem Pfad  $p$  eine Richtung definiert. Als *eingehende Kante* zu einem Knoten  $w$  wird eine Kante  $e = (v, w) \in E$  bezeichnet ( $v \in V$ ), als *ausgehende Kante* dann eine Kante  $f = (w, x) \in E$  ( $x \in V$ ). Der Knoten  $v$  wird auch als *Vorgänger* bezeichnet und  $x$  dementsprechend als *Nachfolger*. Ein Knoten  $v$  ist *adjazent* zu  $w$  bzw. *Nachbar* von  $w$ , wenn eine Kante  $(v, w) \in E$  existiert.

Das *Gewicht* einer Kante zwischen zwei Knoten  $v$  und  $w$  ist eine Abbildung  $d : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $e = (v, w) \mapsto d(e) = d(v, w)$ . Das Gewicht einer Kante wird ab Definition 2.8 immer als Euklidischer Abstand ihrer „eingebetteten Anfangs- und Endpunkte“ interpretiert. Der *Grad*  $\deg(v)$  eines Knoten  $v$  bezeichnet die Anzahl der adjazenten Knoten,  $\deg(v) = |\{w | (v, w) \in E\}|$ . Der *Grad*  $\deg(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist der maximale Knotengrad,

$$\deg(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$$

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *vollständig*, falls  $\deg(v) = |V| - 1$  für jeden Knoten  $v$ . Ein Graph  $G = (V, E)$  ist *zusammenhängend*, wenn es für je zwei Knoten  $v, w \in V$  einen Pfad von  $v$  nach  $w$  gibt. Ein Graph  $G = (V, E)$  ist *zyklfrei*, wenn es für je zwei verschiedene Knoten  $v, w \in V$  keinen Pfad der Länge größer als eins gibt.

Die Definition des Baumes und dazugehöriger Begriffe ist aus [CO, S.1085ff] entnommen.

**Definition 2.2.** Ein Baum  $B = (V, E)$  ist ein zusammenhängender, zykelfreier, ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit einem markierten Knoten  $r \in V$ , der als *Wurzel* bezeichnet wird.

Die *Tiefe*  $l(w)$  eines Knotens  $w$  ist die Länge des Pfades von der Wurzel  $r$  zum Knoten  $w$  in  $B$ . Wenn  $l(x) = l(y) - 1$  für eine Kante  $(x, y) \in E$  auf einem Pfad von der Wurzel zu einem Knoten im Baum gilt, wird  $x$  der *Vater von*  $y$  und  $y$  das *Kind von*  $x$  genannt. Die Wurzel ist der einzige Knoten im Baum, der keinen Vater hat. Ein Knoten ohne Kind heißt *Blatt*. Alle Knoten, die keine Blätter sind, werden *innere Knoten* genannt. Die *Tiefe eines Baumes*  $l(B)$  ist das Maximum aller Tiefen der Blätter, d.h.

$$l(B) = \max_{w \in V} l(w)$$

Für einen Baum  $B = (V, E)$  von Grad  $k$  gilt, dass jeder innere Knoten höchstens Grad  $k$  hat. Falls jeder Knoten außer den Blättern höchstens  $k$  Kinder hat, heißt der Baum *k-när*. Ein Baum heißt *vollständig k-när*, falls jeder innere Knoten genau  $k$  Kinder hat. Ein Baum wird *k-regulär* genannt, wenn für jeden inneren Knoten  $v \in V$  der Grad  $\deg(v) = k$  ist. Ein *k-regulärer Baum* wird *vollständig k-regulär* genannt, falls alle Blätter die gleiche Tiefe haben.

Ein Baum heißt *geordnet*, falls die Kinder jedes Knotens geordnet sind; hat ein Knoten  $v \in V$  genau  $j$  Kinder  $w_1, \dots, w_j \in V$ , so sind die Kinder gemäß ihrer Indizes geordnet und das  $i$ -te Kind ist  $w_i$  ( $i = 1, \dots, j$ ).

## 2.2 Minimaler Spannbaum

Die folgende Definition ist inhaltlich aus [MS, S.265] entnommen.

**Definition 2.3.** Ein *Minimaler Spannbaum* (MST)<sup>3</sup> einer Menge von Knoten  $V$  ist ein Baum minimalen Gewichts, der die Knoten von  $V$  verbindet. Dabei ist das Gewicht durch die Gewichtsfunktion  $d$  bestimmt. Ein MST einer Knotenmenge  $V$  ist nicht immer eindeutig und wird mit  $MST(V)$  bezeichnet.

Für die Bestimmung eines MSTs aus einem gegebenen vollständigen Graphen  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , kann unter anderem der *Algorithmus von Prim* aus [CO, S.572] angewendet werden. Er hat durch Implementierung der Priority-Queue mit Fibonacci-Heaps eine amortisierte Laufzeit von  $O(n \log(n))$ , siehe [CO, S.573].

---

<sup>3</sup>Die Abkürzung MST kommt von der englischen Bezeichnung „minimal spanning tree“.

### 2.3 Graphenklassen

Der Anlass zur Definition folgender Graphenklassen liegt in der Vermutung von Kaufmann und Frati in [KF, S.21], dass diese Graphenklassen für die Beweisführung der dieser Arbeit zugrundeliegenden Problemstellung besonders gut geeignet sind.

**Definition 2.4.** Ein geordneter  $k$ -regulärer Baum  $R = (V, E)$  der Tiefe  $t$  wird *k-reguläre Raupe* genannt, wenn in jeder Tiefe, außer in der Tiefe  $t$ , genau ein Knoten von Grad  $k$  existiert. Jedes Blatt  $v \in V$  hat Grad eins. Wenn ein Pfad maximaler Länge betrachtet wird, heißen alle Kanten zwischen je zwei benachbarten Knoten auf dem Pfad *Rückgrat-Kanten*. Alle Kanten, die in Blättern enden, bis auf die erste und letzte Kante des Pfades maximaler Länge, werden als *Bein* bezeichnet. Die erste und letzte Kante des Pfades ist nicht eindeutig, d.h. sie kann sowohl als Bein oder Rückgrat-Kante bezeichnet werden, je nach Wahl der Pfades.

Ein Beispiel für  $k = 5$  zeigt Abbildung 1:

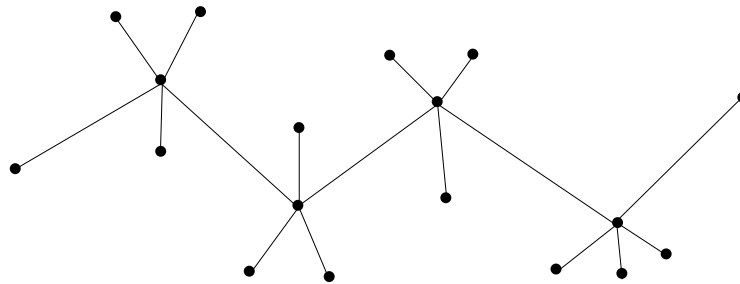


Abbildung 1: 5-reguläre Raupe

**Definition 2.5.** Eine 5-reguläre Raupe  $R$  wird *Zick-Zack* genannt, falls die aufeinanderfolgenden Knoten auf einem Pfad maximaler Länge zwischen 1. Kind und 4. Kind bezüglich des Vaters alternieren. Je zwei benachbarte Knoten auf dem Pfad maximaler Länge sind inzident zu einer Rückgrat-Kante, wie Abbildung 2(a) veranschaulicht.

Ein Zick-Zack heißt *schwach*, falls die aufeinanderfolgenden Knoten auf einem Pfad maximaler Länge zwischen 2. Kind und 3. Kind alternieren, siehe Abbildung 2(b).

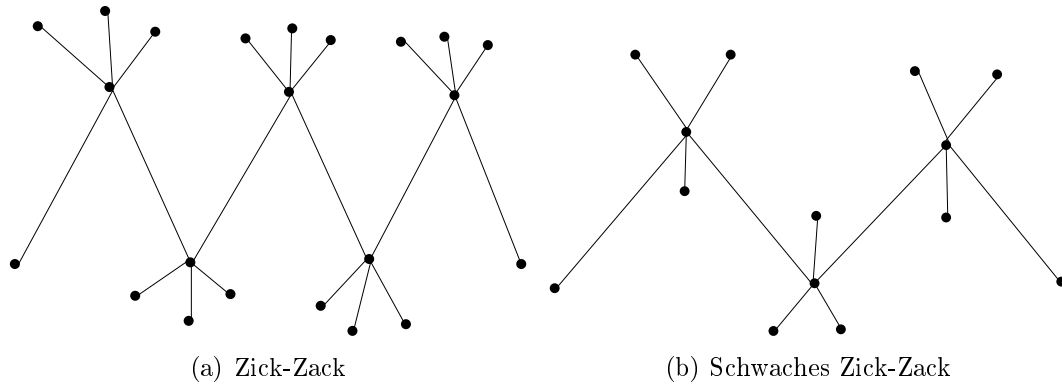


Abbildung 2: Zick-Zack-Arten

**Definition 2.6.** Eine 5-reguläre Raupe  $R$  wird *Schnecke* genannt, falls die aufeinanderfolgenden Knoten auf einem Pfad maximaler Länge immer das 1. Kind oder immer das 4. Kind sind bezüglich des Vaters. Je zwei benachbarte Knoten auf dem Pfad maximaler Länge gehören zu einer Rückgrat-Kante, wie in Abbildung 3 zu sehen.

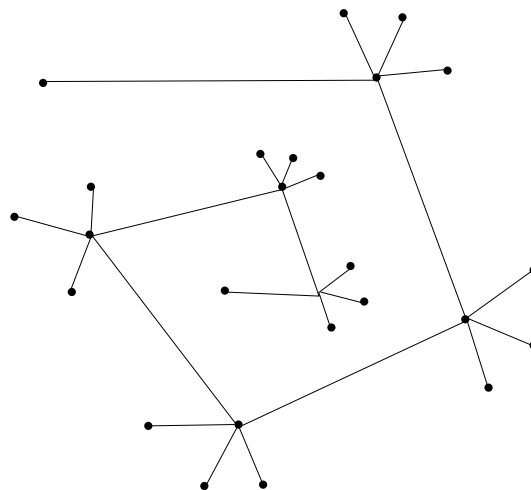


Abbildung 3: Schnecke

Bezüglich der Flächenschranken wird in Kapitel 5 die Graphenklasse untersucht, die aus vollständigen 5-regulären Bäumen mit Erweiterung durch 5-reguläre Raupen an jedem Blatt definiert ist. Hierbei wird die Graphenklasse eingeschränkt auf vollständige 5-reguläre Bäume der Tiefe vier.

## 2.4 Euklidische Ebene

Die in dieser Arbeit betrachteten geometrischen Objekte werden in der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  betrachtet.

**Definition 2.7.** Ein *Punkt*  $P$  ist ein Element aus  $\mathbb{R}^2$ . Punkte werden als Paare  $P = (P_x|P_y)$  geschrieben, wobei  $P_x, P_y \in \mathbb{R}$  die  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinate von  $P$  bezeichnen. Die Notation von Punkten erfolgt im Allgemeinen mit großen lateinischen Buchstaben, außer wenn sie mit Knoten eines Baumes zu identifizieren sind, siehe 2.8.

Eine *Strecke*  $s = \overline{PQ}$  ist die kürzeste Verbindung von  $P$  und  $Q$  in  $\mathbb{R}^2$  und wird als Menge von Punkten aufgefasst. Strecken werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Eine *Gerade*  $g = PQ$  ist eine unendlich lange, gerade Linie, die die Punkte  $P$  und  $Q$  und die Strecke  $s = \overline{PQ}$  enthält. Geraden werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Der *Abstand* zweier Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  ist die Länge der Strecke  $s = \overline{PQ}$ . Mit der Euklidischen Distanzfunktion

$$d: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(P, Q) \longmapsto d(P, Q) := \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2}$$

kann der Abstand von  $P$  und  $Q$  auch durch  $d(P, Q)$  oder kurz  $d(s)$  ausgedrückt werden.

Ein Winkel  $\alpha$  wird mit  $\alpha = \angle(A, B, C)$  bezeichnet, wenn die Punkte  $A, B$  und  $C$  den Winkel definieren. Winkel werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet und sind immer in Grad angegeben. Bei der Notation der Winkel wird das Gradzeichen weggelassen. So wird zum Beispiel statt „ $\alpha = 60^\circ$ “ nur „ $\alpha = 60$ “ geschrieben. Ist  $\alpha$  nur innerhalb eines Intervalls  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  definiert, so wird  $a$  untere Schranke von  $\alpha$  genannt und mit  $\underline{\alpha} := a$  bezeichnet und  $b$  ist die obere Schranke von  $\alpha$  und wird mit  $\bar{\alpha} := b$  bezeichnet. Ein Winkel  $\alpha$  ist *benachbart* zu  $\beta$  bzw.  $\alpha$  ist *neben*  $\beta$ , wenn beide Winkel sich zu einem ergänzen, wie in Abbildung 4(a) veranschaulicht. Ein Winkel  $\alpha$  liegt *gegenüber* von  $\beta$ , wenn  $\alpha$  und  $\beta$  sich zu 360 ergänzen. Dies gilt auch für mehrere Winkel, wie in Abbildung 4(b) zu sehen.

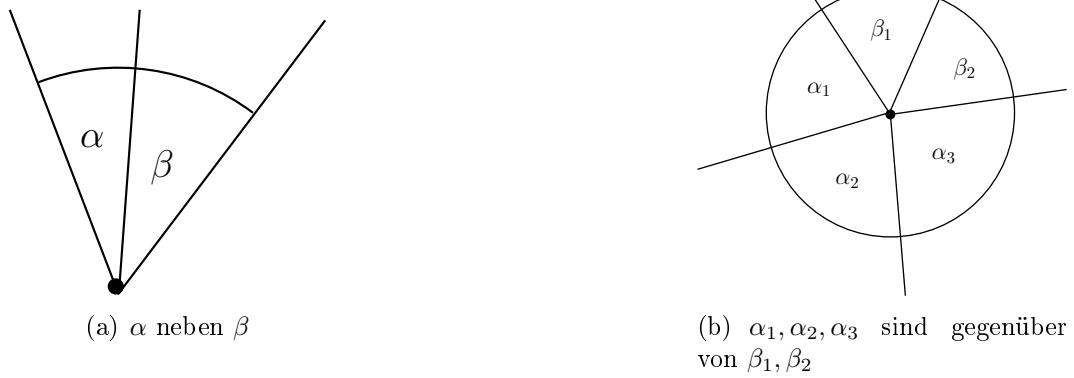


Abbildung 4: Lage von Winkeln

Kreise mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $b \in \mathbb{R}$  werden mit  $k(A, b)$  bezeichnet und sind als Kreisscheibe

$$k(A, b) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, X) \leq b\}$$

aufzufassen. Als Kreisrand wird dann nur die Menge

$$\{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, X) = b\}$$

verstanden. Die Kreisgleichung von  $k(A, b)$  ist

$$(x - A_x)^2 + (y - A_y)^2 = b^2.$$

## 2.5 Einbettung

**Definition 2.8.** Eine *Einbettung* eines geordneten Baumes  $B = (V, E)$  ist eine injektive Abbildung

$$\begin{aligned} \phi: B &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ V \ni v &\longmapsto P = (P_x | P_y) \in \mathbb{R}^2 \\ E \ni (v, w) = e &\longmapsto \overline{\phi(v)\phi(w)} \subset \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

wobei  $\overline{\phi(v)\phi(w)}$  die Strecke von  $\phi(v)$  nach  $\phi(w)$  ist. Dabei dürfen sich die Strecken der Einbettung zweier unterschiedlicher Kanten nicht schneiden. Außerdem enthält keine Strecke einen eingebetteten Knoten aus  $V$ , außer als Anfangs- oder Endpunkt. Eine Einbettung ist nur für geordnete Bäume definiert und ist von ungeordneten Bäumen abgeleitet [KW, S.23f]. Einbettungen erhalten die Ordnung der Kinder jedes Knotens gemäß der Orientierung in Definition 2.9.

$$\begin{aligned} l: E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) = e &\longmapsto l(e) := d(\phi(v), \phi(w)) \end{aligned}$$

ist eine Abbildung, die einer Kante  $e$  ihre Länge  $l(e)$  in der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  zuordnet. Dabei bezeichnet  $d$  die Euklidische Distanzfunktion. In dieser Arbeit wird als Gewichtsfunktion eines Graphen immer die Längenfunktion  $l$  betrachtet.

Die Länge eines Pfades  $p = (v_0, \dots, v_k)$  ist die iterierte Anwendung der Längenfunktion  $l$ , nämlich

$$l(p) = \sum_{i=1}^k l(v_{i-1}, v_i)$$

In der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  werden Punkte im Allgemeinen mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet; wenn sie aber Einbettungen von Knoten sind, werden sie mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Strecken in  $\mathbb{R}^2$  werden immer mit lateinischen Buchstaben bezeichnet, selbst wenn sie Einbettungen von Kanten sind.

## 2.6 Orientierung

**Definition 2.9.** In einem geordneten Baum  $B = (V, E)$  sei für jeden Knoten  $w$  die *Reihenfolge* seiner Kinder in  $\phi(B)$  festgelegt. Sei  $(v, w) \in E$  eine Kante auf einem Pfad von der Wurzel  $r \in V$  zu einem Knoten. Dann sei die Reihenfolge der Kinder von  $w$  im mathematisch negativen Sinne bezüglich der eingebetteten Kante  $\phi(v, w) \in \phi(E)$  festgelegt gemäß ihrer Ordnung bezüglich ihrer Indizes 2.2. Die Kante zum  $i$ -ten Kind  $x_i$  von  $w$  ist die  $i$ -te Strecke  $\overline{\phi(w)\phi(x_i)}$

bezüglich  $\overline{\phi(v)\phi(w)}$  im mathematisch negativen Sinne. Die anliegenden eingebetteten Kanten dieses eingebetteten Knotens  $w$  sind dann wie in Abbildung 5 nummeriert. Die Nummern sind die *Positionen* der eingebetteten Kanten.

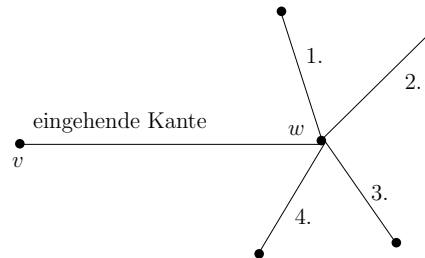


Abbildung 5: Orientierung

## 2.7 Trigonometrische Formeln

Die folgenden trigonometrischen Formeln bilden den Grundstock für alle Umformungen in der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

**Formeln 2.10.** In einem rechtwinkligen Dreieck  $(A, B, C)$  mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha = \angle(B, A, C)$ ,  $\beta = \angle(C, B, A) = 90$ ,  $\gamma = \angle(A, C, B)$ , wie in Abbildung 6 angeordnet, gelten folgende Gleichungen:

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{b}, \quad \sin(\alpha) = \frac{a}{b}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

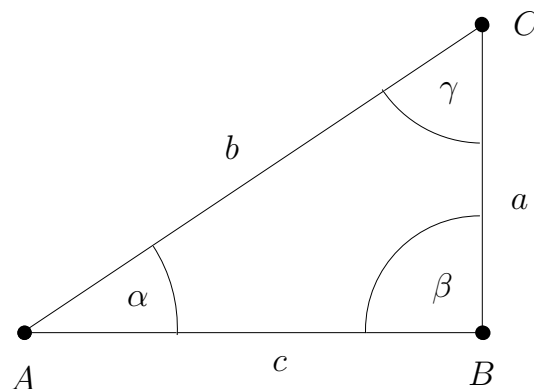


Abbildung 6: Rechtwinkliges Dreieck

Für ein Dreieck wie in Abbildung 6 gelten folgende Additionstheoreme bzw.



Umformungen der Trigonometrie:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha \pm \gamma) &= \sin(\alpha) \cos(\gamma) \pm \cos(\alpha) \sin(\gamma) \\
 \cos(\alpha \pm \gamma) &= \cos(\alpha) \cos(\gamma) \mp \sin(\alpha) \sin(\gamma) \\
 \sin(2\alpha) &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
 1 &= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \\
 \cos(\alpha) &= \sin(90 - \alpha) \\
 \cos(\alpha) + \cos(\gamma) &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \\
 \cos(\alpha) - \cos(\gamma) &= -2 \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \\
 \sin(\alpha) + \sin(\gamma) &= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \\
 \sin(\alpha) - \sin(\gamma) &= 2 \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Wenn es die Terme vereinfacht, werden folgende Ausdrücke ersetzt:

$$\begin{aligned}
 \sin(0) &= 0, & \cos(0) &= 1 \\
 \sin(30) &= \frac{1}{2}, & \cos(60) &= \frac{1}{2} \\
 \sin(60) &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos(30) &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

## 2.8 Landau-Schreibweise

**Definition 2.11.** Sei  $F = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Funktion} \mid n \mapsto f(n)\}$ . Für das asymptotische Verhalten einer Funktion  $f \in F$  seien folgende Symbole aus [CO, S.44f] verwendet:

$$O(f) := \{g \in F \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)\}$$

$$\Omega(f) := \{g \in F \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot f(n) \leq g(n)\}$$

$$\Theta(f) := O(f) \cap \Omega(f)$$

In der Menge  $O(f)$  sind alle Funktionen, für die  $f$  eine asymptotisch obere Schranke ist, in  $\Omega(f)$  sind alle Funktionen, für die  $f$  eine asymptotisch untere Schranke ist.

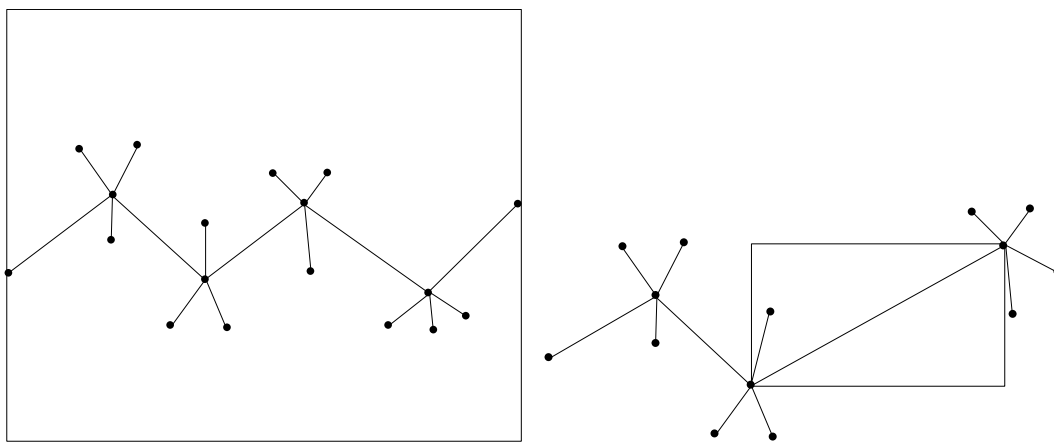
## 2.9 Flächenschranken

Die Definition zum Platzbedarf ist in allgemeinerer Form in [KF, S.2] zu finden.

**Definition 2.12.** Der *Platzbedarf* eines Baumes  $B = (V, E)$  ist die Fläche in der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die benötigt wird um die Einbettung des Baumes  $B$  zu zeichnen. Die Zeichnung wird im Allgemeinen konstruktiv angegeben. Der Platzbedarf ist abhängig von der Anzahl der Knoten im Baum. Es wird unterschieden zwischen oberer und unterer Platz-Schranke, analog zur Komplexität eines Algorithmus.

Die obere Schranke des Platzbedarfs eines Baumes  $B$  sei durch einen Pfad  $p$  maximaler Länge in  $B$  definiert. Die Länge  $l(p)$  des Pfades wird als Grundseite eines Quadrates genommen, welches den Baum  $B$  umschließt [KF, S.4], siehe Abbildung 7(a).

Für eine untere Schranke ist lediglich die Länge  $l(e)$  der längsten Kante  $e$  zu bestimmen. Diese muss in einem Rechteck zumindest auf der Diagonalen Platz haben, siehe Abbildung 7(b).



(a) Platzbedarf  $O(l(p)) \cdot O(l(p))$ ,  
 $l(p) = \max\{l(p') | p' \text{ ist Pfad}\}$

(b) Platzbedarf  $\Omega(\sqrt{l(e)}) \cdot \Omega(\sqrt{l(e)})$ ,  
 $l(e) = \max\{l(e') | e' \in E\}$

Abbildung 7: Flächenschranken

## 2.10 MST-Einbettung eines Baumes

Die folgende Definition ist in Anlehnung an [CO, S.1082] entstanden, wobei für den hier verwendeten Isomorphismus die ordnungserhaltende Eigenschaft hinzugenommen wurde.

**Definition 2.13.** Zwei geordnete Bäume  $B = (V, E)$  und  $B' = (V', E')$  heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus  $\iota : B \rightarrow B'$  gibt, der die Ordnung erhält. D.h. es gelten folgende Eigenschaften:

- $\iota : V \rightarrow V'$ ,  $V \ni v \mapsto v' \in V'$  bijektiv
- $e = (v, w) \in E \Leftrightarrow e' = (\iota(v), \iota(w)) \in E'$
- $w$  ist  $j$ . Kind von  $v \Leftrightarrow \iota(w)$  ist  $j$ . Kind von  $\iota(v)$ .

**Definition 2.14.** Eine Einbettung eines Baumes  $B = (V, E)$  heißt *topologisch äquivalent* zu der Einbettung eines Baumes  $B' = (V', E')$ , wenn  $B$  und  $B'$  isomorph sind [MS, S.266].

**Definition 2.15.** Als *MST-Einbettung eines Baumes* bezeichnet man die Konstruktion eines  $MST(V)$  aus der Knotenmenge eines gegebenen geordneten Baumes  $B = (V, E)$ , sodass  $B$  und  $MST(V)$  topologisch äquivalent sind. Dabei dürfen die eingebetteten Knoten aus  $V$  in  $\mathbb{R}^2$  so verschoben werden, dass die topologische Äquivalenz hergestellt ist.

**Definition 2.16.** Mit der *MST-Bedingung* ist gemeint, dass Punkte nur verschoben werden dürfen, solange sich der MST topologisch nicht verändert. Dies bedeutet beispielsweise, dass für eine eingebettete Kante  $e = (v, w)$  kein eingebetteter Knoten  $x$ , der adjazent zu  $w$  ist, innerhalb des Kreises  $k(v, l(e))$  platziert werden darf. Sonst wäre  $d(v, x) < d(v, w)$  und statt  $(v, w)$  gehört  $(v, x)$  zum MST. Der eingebettete Knoten  $x$  darf auch nicht auf der gleichen Seite der Mittelsenkrechten von der eingebetteten Kante  $e$  liegen wie der eingebettete Knoten  $v$ .

### 3 MST-Einbettungen

#### 3.1 MST-Einbettungen in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$

Monma und Suri gehen in [MS] näher auf die Frage ein, wie sich ein MST ändert, wenn man einen Punkt bzw. mehrere Punkte beliebig verschiebt. Dabei ergeben sich für die Anzahl von MSTs einer  $n$ -elementigen Menge von Punkten  $S$  bei der Verschiebung eines Punktes  $x \in S$  über  $\mathbb{R}^2$  eine untere Schranke  $\Omega(n^2)$  sowie eine obere Schranke  $O(n^4)$ . Weiter unterteilen Monma und Suri den Raum  $\mathbb{R}^2$  in Zellen, sodass die Verschiebung eines Punktes  $x$  innerhalb einer Zelle die MST-Einbettung topologisch nicht verändert. Die beiden Autoren präsentieren einen Algorithmus, der in linearer Zeit einen Baum auf Durchführbarkeit einer MST-Einbettung hin überprüft. Desweiteren geben sie ein Maß für die Sensitivität eines Punktes an, mit dem eine Grenze für die Verschiebbarkeit eines Punktes festgesetzt wird, ohne dass sich die Topologie der MST-Einbettung verändert. Zuletzt beschreiben Monma und Suri einen Konstruktions-Algorithmus für eine MST-Einbettung eines vollständigen Baumes von Grad fünf. Der Algorithmus berechnet aus der Knotenmenge  $V$  eines gegebenen Baumes  $B = (V, E)$  die Platzierung der eingebetteten Knoten  $\phi(v)$ ,  $v \in V$ , sodass  $MST(V)$  bezüglich der Distanzfunktion  $d$  zu  $B$  topologisch äquivalent ist. Die Gewichtsfunktion  $d$  des vollständigen Graphen mit der Knotenmenge  $V$  ist mit der Euklidischen Distanzfunktion  $d$  gleich zu setzen.

Der Konstruktions-Algorithmus behandelt nur Bäume von Grad fünf, was Monma und Suri für eine Klassifikation von Bäumen benutzen, für die es in jedem Fall eine MST-Einbettung gibt. Die Forderung, dass der Grad eines Baumes höchstens fünf ist, ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer MST-Einbettung.

### 3.2 MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad zwei

**Satz 3.1.** *Ein Baum von Grad zwei kann mit  $O(n^2)$  Platz als MST eingebettet werden.*

**Beweis:** Einen Baum  $B = (V, E)$  von Grad zwei ist genau ein Pfad der Länge  $n - 1$  für  $|V| = n$ . Um einen Pfad der Länge  $n - 1$  als MST einzubetten, werden die  $n$  Punkte äquidistant mit Abstand 1 auf einer Strecke in  $\mathbb{R}^2$  verteilt. Die Länge der Strecke ist dann  $n - 1$  und für eine obere Schranke des Platzbedarfs sei ein Quadrat mit Kantenlänge  $n$  gewählt. Dann ist eine obere Flächenschranke die quadrierte Kantenlänge des Quadrates und als obere Flächenschranke ergibt sich  $O(n^2)$ .

Alternativ können die Punkte auch auf dem Rand eines Kreises mit dem Ursprung als Mittelpunkt verteilt werden, siehe Abbildung 8. Damit sich der Pfad bei der MST-Berechnung nicht zu einem Zykel schließt, muss neben den Knoten aus dem Pfad auch ein „Platzhalter-Knoten“ auf dem Kreisrand platziert werden. Dieser „Platzhalter-Knoten“ ist für die MST-Berechnung aber irrelevant. Für  $|V| = n$  gibt es  $n + 1$  Punkte auf dem Kreisrand und  $n - 1$  Kanten, da der Pfad gerade Länge  $n - 1$  hat. Mit der eingehenden und ausgehenden Kante des „Platzhalter-Knotens“ entsprechen die  $(n - 1) + 2 = n + 1$  Kanten in ihrer aufsummierten Länge etwa dem Umfang des Kreises mit noch unbekanntem Radius  $r$ . Es gilt

$$2\pi r = n + 1 \Rightarrow r = \frac{n + 1}{2\pi} = O(n)$$

Wenn der Kreis von einem Quadrat umschlossen wird, muss die Kantenlänge des Quadrates mindestens  $2r$  sein, also mindestens  $\frac{n+1}{\pi}$ . Die quadrierte Kantenlänge des Quadrates ergibt eine obere Flächenschranke  $(\frac{n+1}{\pi})^2 = O(n^2)$ .

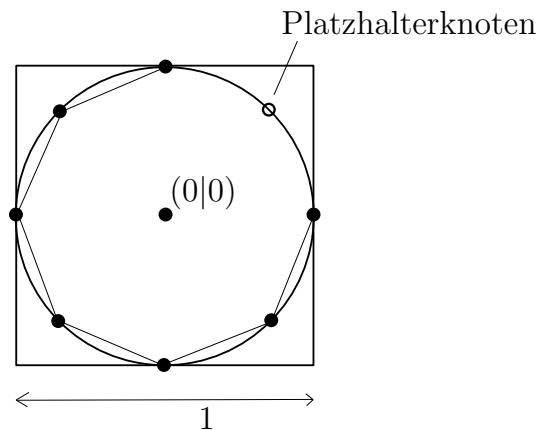


Abbildung 8: MST Einbettung eines Pfades der Länge 6

□

### 3.3 MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad drei

Der Konstruktions-Algorithmus für MST-Einbettungen von Bäumen mit Grad fünf von Monma und Suri in [MS, S.286ff] kann ebenso für Bäume von Grad drei verwendet werden. Daher gibt es auf jeden Fall eine MST-Einbettung für Bäume von Grad drei. Für den Konstruktions-Algorithmus wurde aber eine obere Flächenschranke  $2^{O(n^2)}$  für MST-Einbettungen bewiesen. In diesem Abschnitt wird für vollständige und beliebige Bäume von Grad drei eine andere Konstruktion beschrieben, für die eine polynomielle Flächenschranke bewiesen werden kann. Die Konstruktion und der Beweis der Flächenschranke ist aus [KF, S.4ff] entnommen. Dabei betrachten Kaufmann und Frati binäre Bäume, da diese Grad drei haben. In diesem Abschnitt werden nur die Konstruktionsideen vorgestellt und für vollständige binäre Bäume ein exemplarischer Beweis für eine polynomielle Flächenschranke angegeben. Alle anderen Beweise sind in [KF] zu finden und werden an gegebener Stelle entsprechend referenziert.

#### MST-Einbettungen von vollständigen binären Bäumen

**Satz 3.2.** *Ein vollständiger binärer Baum mit  $n$  Knoten kann als MST in einer Fläche von  $O(n^{4.3})$  eingebettet werden<sup>4</sup>.*

**Beweis:** Die Konstruktion der Einbettung des gegebenen Baumes  $B = (V, E)$  beginnt mit der Platzierung der Wurzel  $r$ . Zwischen den Kanten zu den Kindern von  $r$  – diese seien  $r_1$  und  $r_2$  genannt – ist ein rechter Winkel aufgespannt. Die Kinder  $r_1$  und  $r_2$  sind die Wurzeln der Teilbäume  $T_1$  und  $T_2$  die rekursiv eingebettet werden. Die Teilbäume befinden sich innerhalb eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$  mit Schenkelkantenlänge  $L$  und die Kanten  $(r, r_1)$  und  $(r, r_2)$  haben jeweils die Länge  $cL$ , wobei  $c$  eine reelle, noch zu bestimmende Konstante ist. Der Abstand der Eckpunkte der durch  $T_1$  und  $T_2$  definierten Dreiecke  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  sei  $d$ , wie in Abbildung 9 skizziert.

Je zwei Knoten aus  $T_1$  haben einen Euklidischen Abstand von höchstens  $\sqrt{2}L$ , weil die Kantenlänge des rechtwinkligen, gleichseitigen Dreiecks  $\Delta_1$ , in dem  $T_1$  eingebettet ist, genau  $L$  ist. Gleiches gilt auch für je zwei Knoten aus  $T_2$ . Der Abstand zwischen zwei beliebigen Knoten  $w_1 \in T_1$  und  $w_2 \in T_2$  ist mindestens  $d$ , und  $w_1$  sowie  $w_2$  haben zu  $r$  mindestens den Abstand  $cL$ . Per Konstruktion ist

$$d \geq \sqrt{2}(c+1)L - 2 \cdot \sqrt{2}L = \sqrt{2}(c-1)L.$$

Für beliebige Wahl von  $c \geq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)}$  ist

$$d \geq \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} - 1 \right) L = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} L = cL$$

<sup>4</sup>Diesen Sachverhalt beschreibt Theorem 1 in [KF, S.5] und ist dort genauer ausgeführt.

und

$$d = \sqrt{2}(c-1)L = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)} \geq \sqrt{2}L.$$

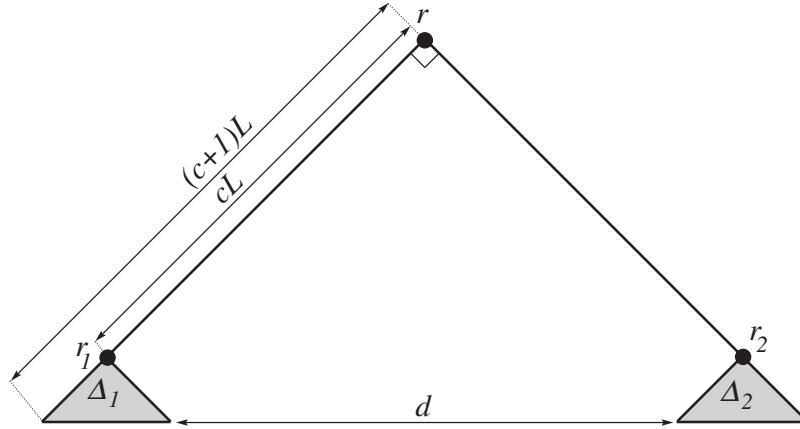


Abbildung 9: Die rekursive Konstruktion einer MST Einbettung eines vollständigen binären Baumes (Quelle: [KF]).

In diesem Fall ist diese Konstruktion eine MST Einbettung und für die Länge  $S(n)$  der Hypotenuse des rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks, in dem ein vollständiger binärer Baum mit  $n$  Knoten eingebettet ist, gilt:

$$\begin{aligned} S(n) &= (c+1)S\left(\frac{n-1}{2}\right) < (c+1)S\left(\frac{n}{2}\right) = (c+1)^{\log_2 n} \\ &= O\left(\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\log_2 n}\right) = O\left(n^{\log_2 \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}}\right) \\ &\subseteq O(n^{\log_2 4.415}) \subseteq O(n^{2.15}) \end{aligned} \quad (1)$$

Die Gleichung (1) gilt nach folgendem Logarithmusgesetz:

$$\begin{aligned} a^{\log_2 n} = x &\Leftrightarrow \log_2 n = \log_a x = \frac{\log_2 x}{\log_2 a} \\ &\Leftrightarrow (\log_2 n) \cdot (\log_2 a) = \log_2 x \\ &\Leftrightarrow 2^{(\log_2 n) \cdot (\log_2 a)} = x \\ &\Leftrightarrow (2^{\log_2 n})^{(\log_2 a)} = x \\ &\Leftrightarrow n^{(\log_2 a)} = x \end{aligned}$$

Die quadrierte Hypotenuse liefert dann eine obere Schranke für den Platzbedarf der MST-Einbettung eines vollständigen binären Baumes.

□

**MST-Einbettungen von beliebigen binären Bäumen**

Für die MST Einbettung eines beliebigen binären Baumes ist eine andere Konstruktion notwendig, da ein beliebiger binärer Baum mit  $n$  Knoten so entartet sein kann, dass er beispielsweise hauptsächlich Knoten mit nur einem Nachfolger hat. Dann hat der Baum eine Tiefe  $O(n)$  und ein vollständiger binärer Baum der Tiefe  $O(n)$  hat  $2^{O(n)}$  Knoten. Dann liefert die Konstruktion aus Satz 3.2 die Schranke  $(2^{O(n)})^{4.3} = 2^{O(n)}$ , welche deutlich zu groß für eine polynomielle Beschränkung der Fläche ist.

**Satz 3.3.** *Ein beliebiger binärer Baum mit  $n$  Knoten kann als MST in einer Fläche von  $O(n^{11.387})$  eingebettet werden<sup>5</sup>.*

Aus dem Baum wird ein Pfad maximaler Länge herausgenommen, d.h. beginnend mit der Wurzel folgt auf jeden Knoten das Kind aus dem Teilbaum mit größerer Tiefe, sodass der Baum in disjunkte Teilbäume zerfällt. Der Pfad wird in Form eines Zick-Zacks mit Innenwinkeln von 120 an jedem Knoten  $v_i \in V$  gezeichnet. Für jeden Index  $i$  werden die übrigen 240 an dem Knoten  $v_i$  in vier Winkel  $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(3)}, \gamma_i^{(4)}$  aufgeteilt, genauer in  $\gamma_i^{(1)} = \gamma_i^{(4)} = 90$  und  $\gamma_i^{(2)} = \gamma_i^{(3)} = 30$ . Diese vier Winkel spannen vier Bereiche  $W_i^{(1)}, W_i^{(2)}, W_i^{(3)}, W_i^{(4)}$  auf, wie in Abbildung 10 skizziert.

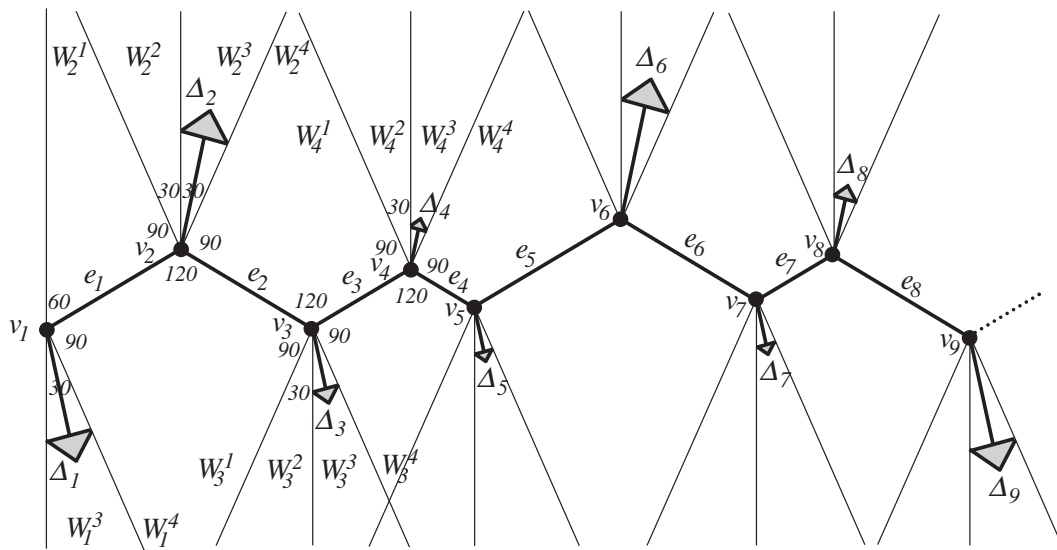


Abbildung 10: Die Rekursive Konstruktion einer MST Einbettung eines beliebigen binären Baumes (Quelle: [KF]).

Jeder Teilbaum  $T_i$  mit Wurzel  $r_i$ , dessen Vater  $v_i$  auf dem Pfad maximaler Länge liegt, wurde durch Herausnahme des Pfades separiert und wird nun innerhalb des Dreiecks  $\delta_i$  in den Bereich  $W_i^{(3)}$  platziert. Alle Teilbäume sind disjunkt und bilden daher keine Überschneidungen. In allen Teilbäumen wird

<sup>5</sup>Diesen Sachverhalt beschreibt Theorem 2 in [KF, S.12] und ist dort genauer ausgeführt.



die Konstruktion innerhalb der in Abbildung 10 markierten gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken  $\Delta_i$  rekursiv fortgesetzt. Die Kante zwischen  $v_i$  und  $r_i$  steht senkrecht zur Hypotenuse des Dreiecks  $\Delta_i$  für den Teilbaum  $T_i$ .

Sei  $c := 1.932$ . Die Kante zum Teilbaum  $T_i$  habe die Länge  $cL_i$  und die Kante  $e_i$  mit Anfangsknoten  $v_i$ , der auf dem Pfad maximaler Länge liegt, bekommt die Länge  $\max\{cL_i, cL_{i+1}\}$  zugewiesen, falls beide Teilbäume  $T_i$  und  $T_{i+1}$  existieren; anderenfalls bekommt  $e_i$  die Länge 1 zugewiesen. Nun ist dies eine MST Einbettung, da insbesondere die Abstände zwischen Teilbäumen den Mindestabstand nicht unterschreiten. Der Beweis dazu ist in [KF, S.7] geführt. Lemma 1 in [KF, S.9] bestimmt die Länge der Hypotenuse  $h(n)$  des Dreiecks, in welches ein beliebiger binärer Baum mit  $n$  Knoten eingebettet wird. Demnach ist

$$h(n) \leq n^{\log_2 51.738} = O(n^{5.6932})$$

und die quadrierte Hypotenuse ist eine obere Flächenschranke für den Platzbedarf.

### 3.4 MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad vier

Der Konstruktions-Algorithmus für MST-Einbettungen von Bäumen mit Grad fünf von Monma und Suri in [MS, S.286ff] kann ebenso für Bäume von Grad vier verwendet werden. Daher gibt es auf jeden Fall eine MST-Einbettung für Bäume von Grad vier. Für den Konstruktions-Algorithmus wurde aber eine obere Flächenschranke  $2^{O(n^2)}$  für MST-Einbettungen bewiesen. In diesem Abschnitt wird für vollständige und beliebige Bäume von Grad vier eine andere Konstruktion beschrieben für die eine polynomielle Flächenschranke bewiesen werden kann. Die Konstruktion und der Beweis der Flächenschranke ist aus [KF, S.12ff] entnommen. Dabei betrachten Kaufmann und Frati ternäre Bäume, da diese Grad vier haben. In diesem Abschnitt werden nur die Konstruktionsideen angegeben, die Beweise sind in [KF] nachzulesen.

**MST-Einbettungen von vollständigen ternären Bäumen**

**Satz 3.4.** *Ein vollständiger ternärer Baum mit  $n$  Knoten kann als MST in einer Fläche von  $O(n^{3.73})$  eingebettet werden<sup>6</sup>.*

Die Wurzel  $r$  wird in die Mitte der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks platziert. Wie in Abbildung 11 verdeutlicht, wird der gestreckte Winkel bei  $r$  innerhalb des Dreiecks in sechs Winkel von je 10 und zwei Winkel von je 60 eingeteilt. Je zwei benachbarte 10-Winkel spannen einen Bereich für die Platzierung eines Teilbaumes auf, in dem die Konstruktion rekursiv fortgesetzt wird. Die 60-Winkel spannen je ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge  $d = L/(2 \cdot \sin(10)) > 2.879L$  auf, wobei  $L$  die Länge der Kathete der Dreiecke ist, welche die Teilbäume umschließen. Auch in dieser Konstruktion sind die Minimalabstände für die MST-Bedingung gewährleistet<sup>7</sup> und die Länge der Hypotenuse  $h(n)$  eines Baumes mit  $n$  Knoten ist

$$h(n) \leq 7.7284h(n/3) \leq 7.7284^{\log_3 n} = n^{\log_3 7.7284} \leq n^{1.862}$$

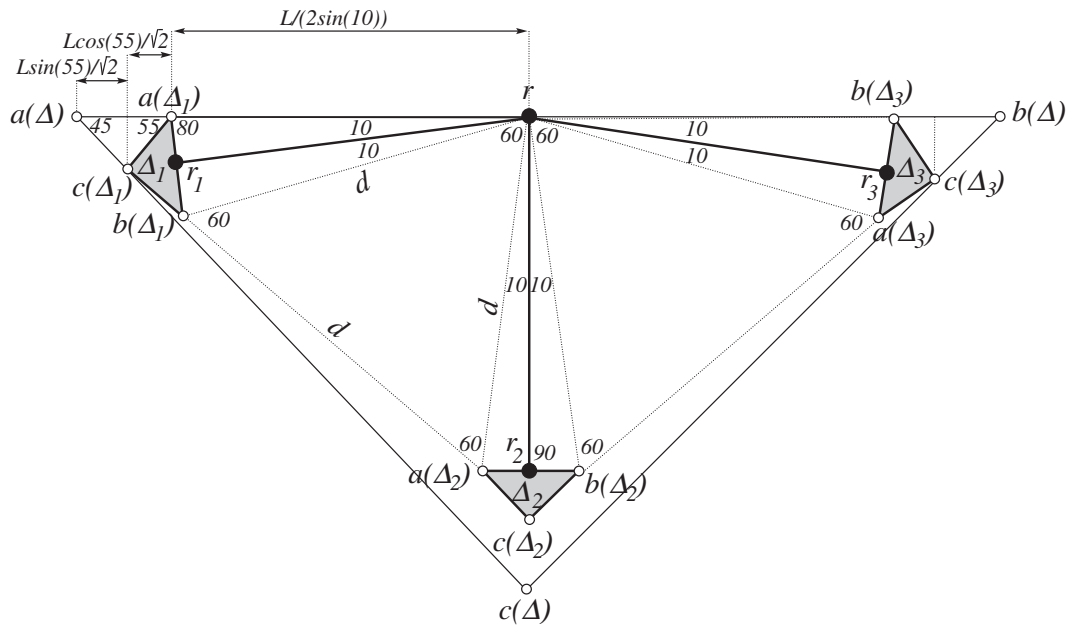


Abbildung 11: Die rekursive Konstruktion einer MST Einbettung eines vollständigen ternären Baumes (Quelle: [KF]).

<sup>6</sup>Diesen Sachverhalt beschreibt Theorem 3 in [KF, S.13] und ist dort genauer ausgeführt.

<sup>7</sup>Genauere Erklärungen zur Einhaltung der MST-Bedingung und Berechnung des Platzbedarfs befinden sich in [KF, S.12f].

### MST-Einbettungen von beliebigen ternären Bäumen

Die Konstruktion einer MST-Einbettung eines vollständigen ternären Baumes kann hier aus dem gleichen Grund wie bei binären Bäumen nicht angewendet werden.

**Satz 3.5.** *Ein beliebiger ternärer Baum mit  $n$  Knoten kann als MST in einer Fläche von  $O(n^{21 \cdot 252})$  eingebettet werden<sup>8</sup>.*

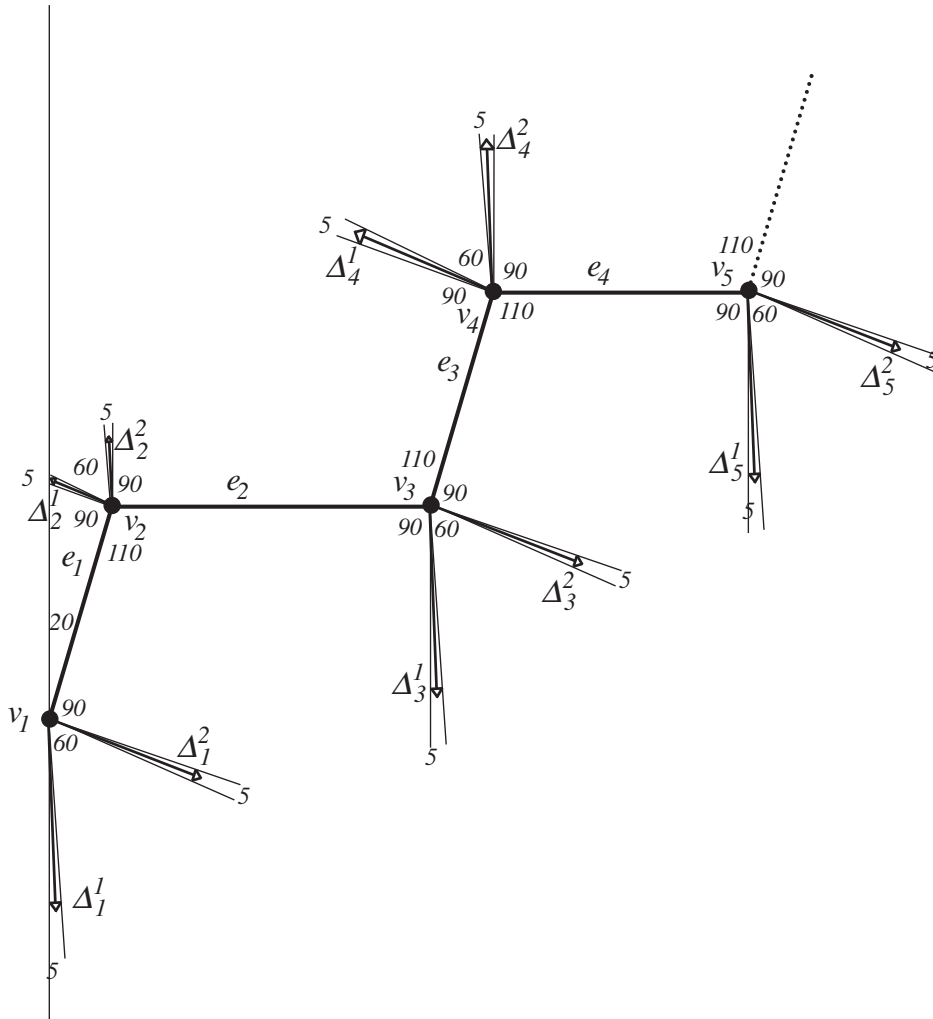


Abbildung 12: Die rekursive Konstruktion einer MST Einbettung eines beliebigen ternären Baumes. Für eine bessere Lesbarkeit ist die Länge der Kanten zu Teilbäumen vergrößert (Quelle: [KF]).

<sup>8</sup>Diesen Sachverhalt beschreibt Theorem 4 in [KF, S.21] und ist dort genauer ausgeführt.

Die folgenden Vorgehensweisen sind analog zum Fall aus 3.2 für einen beliebigen binären Baum. Aus dem Baum wird ein Pfad  $p$  maximaler Länge herausgenommen. Der Pfad wird in Form eines Zick-Zacks mit Innenwinkeln von  $110$  an jedem Knoten  $v_i \in V$  gezeichnet. Für jeden Index  $i$  werden die übrigen  $250$  an dem Knoten  $v_i$  in fünf Winkel  $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(3)}, \gamma_i^{(4)}, \gamma_i^{(5)}$  aufgeteilt, genauer in  $\gamma_i^{(1)} = \gamma_i^{(5)} = 90$  und  $\gamma_i^{(2)} = \gamma_i^{(4)} = 5$  und  $\gamma_i^{(3)} = 60$ . Diese fünf Winkel spannen fünf Bereiche  $W_i^{(1)}, W_i^{(2)}, W_i^{(3)}, W_i^{(4)}, W_i^{(5)}$  auf, wie in Abbildung 12 skizziert. Durch Herausnahme des Pfades aus dem gegebenen Baum entstehen für jeden Knoten  $v_i$  auf dem Pfad zwei Teilbäume  $T_i^{(1)}$  und  $T_i^{(2)}$ , deren Wurzel jeweils Nachfolger von  $v_i$  ist. Diese beiden Teilbäume werden nun innerhalb der Dreiecke  $\Delta_i^{(1)}$  und  $\Delta_i^{(2)}$  in die Bereiche  $W_i^{(2)}$  und  $W_i^{(4)}$  platziert. Alle Teilbäume sind kanten-disjunkt und bilden daher keine Überschneidungen. In allen Teilbäumen wird die Konstruktion rekursiv fortgesetzt, die sich innerhalb der in Abbildung 12 markierten gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken  $\Delta_i^{(1)}$  und  $\Delta_i^{(2)}$  befindet.

Sei  $c := 11.452$ . Die Länge der Kathete des rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecks  $\Delta_i^{(j)}$ , in welchem der Teilbaum  $T_i^{(j)}$  rekursiv eingebettet wird, sei mit  $L_i^{(j)}$  bezeichnet,  $j = 1, 2$  und  $i = 1, \dots, n$ . Die Kante von der Wurzel des Teilbaumes  $T_i^{(j)}$  zum Knoten auf dem Pfad  $p$  habe die Länge  $cL_i^{(j)}$  und die Kante  $e_i$  auf  $p$  bekomme die Länge  $\max\{cL_i^{(1)}, cL_i^{(2)}\}$  zugewiesen, falls beide Teilbäume  $T_i^{(1)}$  und  $T_i^{(2)}$  existieren, anderenfalls bekommt  $e_i$  die Länge  $1$  zugewiesen. Nun ist dies eine MST Einbettung, da insbesondere die Abstände zwischen Teilbäumen den Mindestabstand nicht unterschreiten. Der Beweis dazu ist in [KF, S.14] geführt. Lemma 2 in [KF, S.20] bestimmt die Länge der Hypotenuse  $h(n)$  des Dreiecks, in welchem ein beliebiger ternärer Baum mit  $n$  Knoten eingebettet wird. Demnach ist

$$h(n) \leq n^{\log_2 1579.805} = O(n^{10.626})$$

und die quadrierte Hypotenuse ist eine obere Schranke für den Platzbedarf.

### 3.5 MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad fünf

Die Konstruktion einer MST-Einbettung von Monma und Suri in [MS, S.286ff] geht von einem vollständigen 5-regulären Baum  $B = (V, E)$  aus. Dieser Konstruktionsalgorithmus wird hier vorgestellt. Wie in Abbildung 13 zu sehen ist, versucht man nicht Knoten, sondern Kreise in die Bereiche zu platzieren, wo die MST-Einbettung ungehindert rekursiv fortgesetzt werden kann. Die Kreise dürfen aber nur so groß sein, wie es die unteren Schranken der Winkel zulassen.

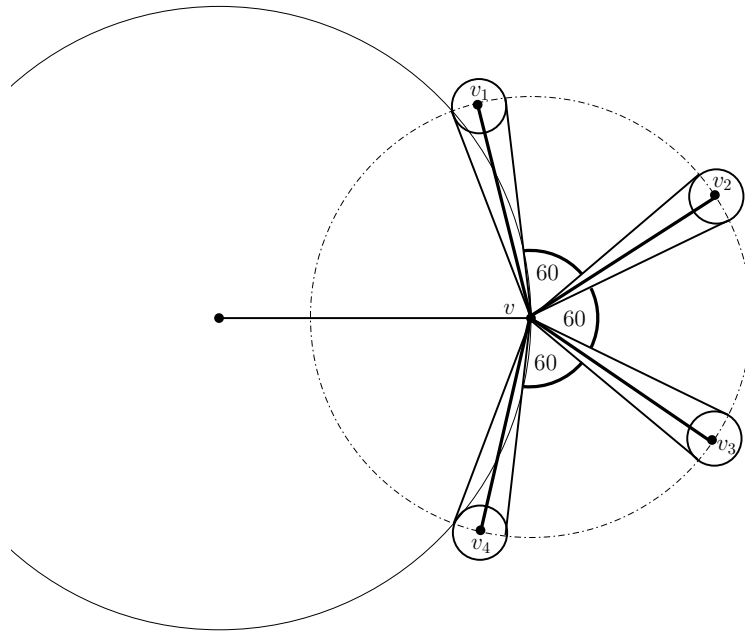


Abbildung 13: MST-Einbettung nach Konstruktions-Algorithmus von Monma und Suri

**Algorithmus 3.6.** Konstruktionsalgorithmus zur MST Einbettung eines vollständigen 5-regulären Baumes. Dieser Algorithmus enthält die Definition 3.7, die Einbettungsregel 3.8 und den Algorithmus 1 für die iterierte Anwendung der Einbettungsregel.

**Definition 3.7.** Knoten mit Distanz  $i$  von der Wurzel  $r$  heißen *Level- $i$ -Knoten*. Die ausgehenden Kanten von Level- $i$ -Knoten heißen *Level- $i$ -Kanten*. Es wird definiert

$$\begin{aligned} \theta'_i &:= \text{minimaler Winkel zwischen aufeinanderfolgenden} \\ &\quad \text{Nachbarn auf } i\text{-tem Level} \\ \theta_i &:= \theta'_i - 60 \\ l_i &= \text{Länge der Kante auf Level } i \end{aligned}$$

**Einbettungsregel 3.8.** Seien  $v_0, \dots, v_4$  Nachbarn von  $v$  im mathematisch negativen Sinne geordnet. Der Vater von  $v$  sei  $v_0$  mit  $d(v, v_0) = l_{i-1}$ . Die Nachbarn  $v_1, \dots, v_4$  werden auf dem Kreisrand von  $k(v, l_i)$  platziert mit

1.  $\angle(v_1, v, v_0) = \angle(v_0, v, v_4) = 90 - \frac{\theta_{i-1}}{10}$
2.  $\angle(v_j, v, v_{j+1}) = 60 + \theta_i \forall j = 1, 2, 3$

---

### Algorithmus 1

---

**Eingabe:** Vollständiger 5-regulärer Baum  $B = (V, E)$  mit Wurzel  $r$ ,  
Euklidische Distanzfunktion  $d$ .

**Ausgabe:** Eine MST-Einbettung von  $B$ .

$\theta_0 := 12;$

$l_0 := 1;$

Die Wurzel  $r$  wird auf dem Ursprung platziert;

Auf dem Kreisrand von  $k(r, 1)$  werden die Nachbarn  $\{v_0, \dots, v_4\}$  von  $r$  äquidistant verteilt;

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

$\theta_i := \frac{180}{15^{i+1}};$

$l_i := \frac{60^i}{15^{\frac{i(i+1)}{2}}};$

$s$  sei Endpunkt einer Level- $(i-1)$ -Kante;

Die Endpunkte der Level- $i$ -Kanten werden auf dem Kreis  $k(s, l_i)$  äquidistant verteilt gemäß der Einbettungsregel 3.8;

**return** MST-Einbettung;

---

Dieser Konstruktions-Algorithmus 3.6 erzeugt einen Baum  $S(B)$ . Lemma 7.3 in [KF, S.288ff] von Monma und Suri beweist die topologische Äquivalenz von  $S(B)$  und  $B$ .

### 3.6 MST-Einbettungen mit Bäumen von Grad sechs oder größer

Für einen gültigen MST von Grad sechs kann man feststellen, dass es einen topologisch äquivalenten MST mit Grad fünf gibt. Dieses Ergebnis liefert Lemma 7.2 in [MS, S.286] von Monma und Suri und wird hier kurz vorgestellt.

**Lemma 3.9.** *Ein Baum von Grad sechs, der eine gültige MST-Einbettung hat, kann in einen topologisch äquivalenten Baum von Grad fünf überführt werden.*

**Beweis:** Der Beweis der topologischen Äquivalenz erfolgt über die Annahme, dass es einen Knoten  $u$  im MST einer Menge  $S$  gibt, dessen Grad sechs ist. Für seine Nachbarn  $v_0, \dots, v_5$  – im mathematisch negativen Sinne geordnet – gilt, dass alle gleichen Abstand zu  $u$  haben und dass zwischen je zwei im mathematisch negativem Sinn aufeinanderfolgenden Kanten ein Winkel von exakt  $60^\circ$  ist. Dann kann durch eine Vertausch-Operation, welche die Kante  $(u, v_0)$  durch  $(v_0, v_1)$  ersetzt, ein zweiter MST erzeugt werden. Für diesen gilt aber, dass  $\deg(u) = 5$  ist und  $\deg(v_0)$  sich nicht verändert gegenüber dem ersten MST. Um zu zeigen, dass sich auch  $\deg(v_1)$  nicht auf sechs erhöht, nimmt man an, dass  $v_1$  Grad sechs hat. Dann bilden seine Nachbarn ein regelmäßiges Sechseck und  $v_2$  ist ebenfalls eine Ecke dieses Sechsecks. Das impliziert aber die Existenz einer Kante  $(v_1, v_2)$ , welche weder zum ersten MST noch zum zweiten MST gehört, was ein Widerspruch ist. So kann also jeder Knoten von Grad sechs mit einer Vertausch-Operation zu einem Knoten von Grad fünf gemacht werden.

□

Ein Beispiel für einen Baum mit Grad sechs, der eine MST Einbettung hat, liefert Abbildung 14. Die Einbettung ist dann genau die Zeichnung des Baumes, die in Abbildung 14 zu sehen ist.

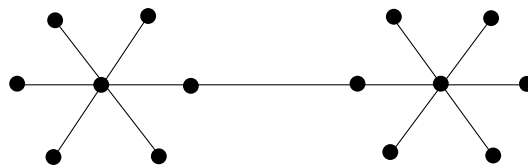


Abbildung 14: MST mit zwei Knoten vom Grad sechs

Im Beweis der topologischen Äquivalenz wurde ausgenutzt, dass es einen Nachbarknoten mit Grad vier oder kleiner gibt. Wenn aber jeder Nachbar Grad sechs hat, kann die Vertausch-Operation nicht angewendet werden und für einen solchen Baum existiert keine MST-Einbettung. Insbesondere können vollständige 6-näre Bäume nicht als MST eingebettet werden.

### 3.7 MST-Einbettung einer Raupe

Der Konstruktions-Algorithmus 3.6 für Bäume mit Grad fünf von Monma und Suri liefert eine MST-Einbettung mit maximalem Platzbedarf  $2^{O(n^2)}$ . Die Konstruktionen für Bäume von Grad vier oder kleinerem Grad von Kaufmann und Frati liefern MST-Einbettungen mit maximalem Platzbedarf  $O(n^{22})$ , also MST-Einbettungen mit polynomieller Platzbeschränkung.

Nun stellt sich die Frage, ob bei Bäumen von Grad fünf auch ein Algorithmus existiert, der eine MST-Einbettung mit polynomielltem Platzbedarf liefert. Bisher war eine mögliche Existenz nicht bekannt und wird in dieser Arbeit widerlegt. Der Beweis ist konstruktiv und wird in Kapitel 5 geführt. Hilfssätze für diesen Beweis sind in Kapitel 4 ausgelagert und die Verfeinerung der unteren Flächenschranke wird in Kapitel 6 bewiesen. Insgesamt wird bewiesen, dass eine Graphenklasse mit 5-regulären Bäumen nur mit mindestens exponentiellem Platzbedarf als MST eingebettet werden kann. Als untere Schranke stellt sich für diese Graphenklasse  $2^{\Omega(n^2)}$  heraus.

#### Problemstellung

Sei  $S \subset \mathbb{R}^2$  eine endliche Menge von Punkten und  $B = (V, E)$  ein Baum von Grad fünf. Gesucht ist eine Belegung der Koordinaten jedes Punktes von  $S$ , sodass ein  $MST(\phi^{-1}(S))$  – bezüglich der Euklidischen Distanzfunktion  $d(v, w) = d(\phi(v), \phi(w)) \forall v, w \in \phi^{-1}(S)$  als Gewichtsfunktion – zu  $B$  isomorph ist.

Außerdem soll die Belegung der Koordinaten jedes Punktes so gewählt werden, dass ein resultierender MST minimale Fläche für eine Zeichnung benötigt.



## 4 Hilfssätze

In diesem Kapitel werden Bezeichnungen eingeführt und Koordinaten von wichtigen Punkten, sowie Geradengleichungen hergeleitet. Diese treten in den Hilfssätzen und Kapitel 5 häufig auf. Die Hilfssätze dienen der Strukturierung des Beweises in Kapitel 5 und sind der Übersicht halber in diesem Kapitel aufgeführt. Sie werden unterteilt in längenbeschränkende und winkelbegrenzende Hilfssätze.

In Kapitel 4, 5 und 6 wird zwischen dem Baum als Modell und der Zeichnung nicht mehr streng unterschieden. Da man Knoten mit Punkten und Kanten mit Strecken identifizieren kann, werden diese Bezeichnungen oft synonym verwendet.

### 4.1 Häufig auftretende Konstellationen

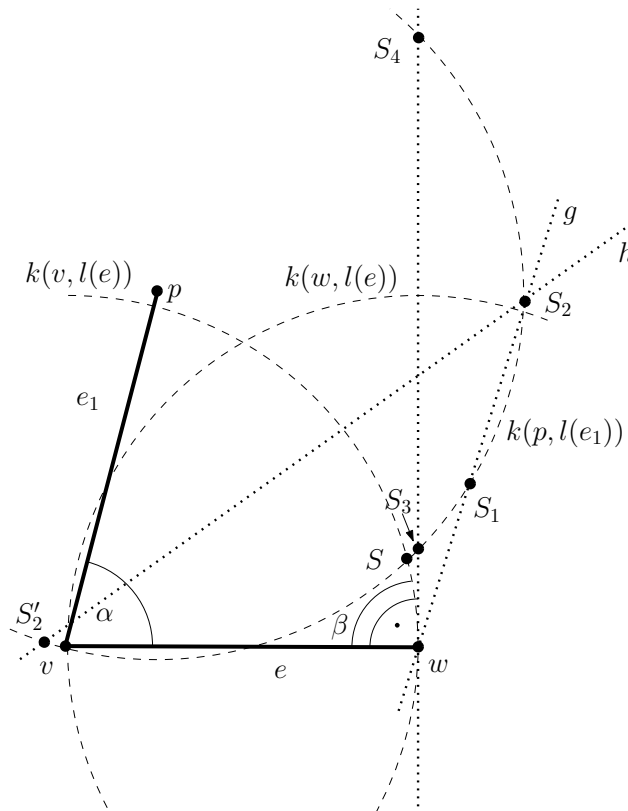


Abbildung 15: Bezeichnungen für die folgenden Herleitungen

**Bezeichnungen 4.1.** Seien  $B = (V, E)$  ein Baum,  $p, q, v, w \in V$ ,  $e_1, e, e_2 \in E$  mit  $e_1 = (p, v)$ ,  $e = (v, w)$  und  $e_2 = (w, q)$ .

Da die Knoten  $p, q, v, w \in V$  den Punkten  $\phi(p), \phi(q), \phi(v), \phi(w)$  durch Einbettung entsprechen, wird im Folgenden für jeden Knoten  $v \in V$  statt “ $\phi(v)$ “ lediglich “ $v$ “ geschrieben. Ebenso werden Strecken für jede Kante  $e \in E$  mit “ $e$ “ statt “ $\phi(e)$ “ bezeichnet.

Seien die Winkel  $\alpha = \angle(w, v, p)$  und  $\beta = \angle(q, w, v)$  wie in Abbildung 15 gezeichnet. Es seien  $v = (0|0)$ ,  $w = (l(e)|0)$  und  $p = (l(e_1) \cos(\alpha)|l(e_1) \sin(\alpha))$ .  $h$  sei die Mittelsenkrechte von  $\overline{pw}$ . Mit  $m := \max\{l(e), l(e_1)\}$  seien  $S_2$  und  $S'_2$  die Schnittpunkte des Kreises  $k(p, m)$  mit  $h$ . Die Gerade  $g$  sei hier durch  $S_2$  und  $w$  definiert. Später ist eine größere Steigung für diese Gerade zugelassen und  $S_2$  liegt nicht mehr zwingend auf  $g$ . Die Schnittpunkte von  $g$  mit dem Kreis  $k(p, m)$  seien  $S_2$  und  $S_1$ . Die Schnittpunkte der Kreise  $k(p, m)$  und  $k(v, l(e))$  seien  $S$  und  $S'$ .

### Herleitung der Geradengleichung der Mittelsenkrechten $h$

**Behauptung 4.2.** Die Geradengleichung für die Mittelsenkrechte  $h$  von  $\overline{pw}$  ist

$$h(x) = \frac{l(e) - l(e_1) \cos(\alpha)}{l(e_1) \sin(\alpha)} \cdot x + \frac{l(e_1)^2 - l(e)^2}{2l(e_1) \sin(\alpha)}, \quad \alpha \in [60, 90].$$

**Beweis:** Sei  $60 \leq \alpha \leq 90$ . Für die allgemeine Geradengleichung  $h(x) = mx + b$  sind die fehlenden Größen  $m$  und  $b$  zu bestimmen.

Zunächst ist die Steigung  $s$  von  $\overline{pw}$  gesucht:  $s = -\frac{l(e_1) \sin(\alpha)}{l(e) - l(e_1) \cos(\alpha)}$ . Für die Steigung  $m$  der Mittelsenkrechten  $h$  gilt dann:  $m = -\frac{1}{s} = \frac{l(e) - l(e_1) \cos(\alpha)}{l(e_1) \sin(\alpha)}$ . Da der Mittelpunkt  $M$  zwischen  $p$  und  $w$  liegt, gilt:

$$\begin{aligned} M &= (l(e_1) \cos(\alpha) + 0.5(l(e) - l(e_1) \cos(\alpha))|0 + 0.5l(e_1) \sin(\alpha)) \\ &= (0.5(l(e) + l(e_1) \cos(\alpha))|0.5l(e_1) \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

Den  $y$ -Achsenabschnitt  $b = h(x) - mx$  kann man nun durch Einsetzen von  $M = (M_x|M_y)$  ermitteln, da  $M$  auf der Geraden  $h$  liegen muss:

$$\begin{aligned} b &= M_y - m \cdot M_x \\ &= \frac{1}{2}l(e_1) \sin \alpha - \frac{l(e) - l(e_1) \cos \alpha}{l(e_1) \sin \alpha} \cdot \frac{1}{2}(l(e) + l(e_1) \cos \alpha) \\ &= \frac{l(e_1)^2 - l(e)^2}{2l(e_1) \sin \alpha} \end{aligned}$$

□

### Herleitung des Schnittpunktes $S_2$ der Mittelsenkrechten $h$ mit dem Kreis $k(p, m)$

**Behauptung 4.3.** Der Schnittpunkt  $S_2$  der Mittelsenkrechten  $h$  mit dem Kreis  $k(p, m)$ ,  $m := \max\{l(e), l(e_1)\}$  mit minimalem eingeschlossenem Winkel  $\beta = \angle(S_2, w, v)$  ist

$$S_2 = (l(e) + l(e) \cos(2\alpha - 60) | l(e) \sin(2\alpha - 60)).$$

**Beweis:** Sei  $60 \leq \alpha \leq 80$  und  $m := \max\{l(e_1), l(e)\}$ .

Zunächst wird begründet, dass  $S_2$  ohne Einschränkung auf dem Kreis  $k(p, l(e))$  liegt.

**Fall 1:**  $l(e_1) \leq l(e)$

Dann ist der Radius  $m = l(e)$ .

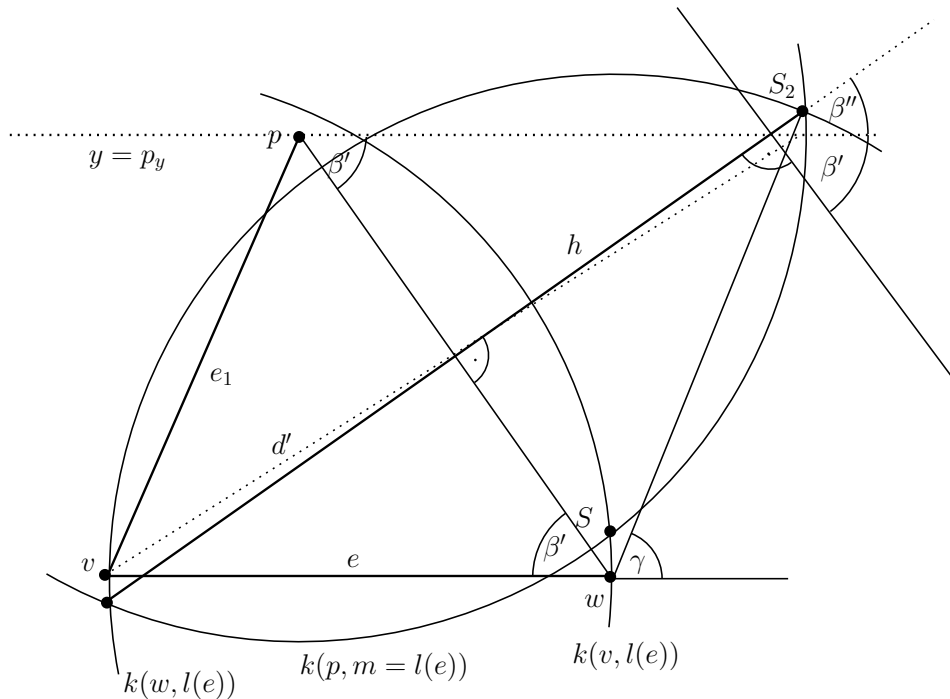
Da  $l(e_1) > 0$  und  $60 \leq \alpha \leq 80$ , ist  $p_y > 0$  und daher ist  $\beta' > 0$ . Dabei sei  $\beta'$  der Winkel zwischen  $e$  und  $\overline{pw}$ . Durch die MST-Bedingung 2.16, dass  $p$  keine größere  $x$ -Koordinate haben darf als  $0.5l(e)$ , ist  $\beta' < 90$ . Nun ist der Winkel  $\beta''$  zwischen  $h$  aus Behauptung 4.2 und der Geraden  $y = p_y$  größer als  $0$ , da  $\beta'' = 90 - \beta' > 0$ . Wenn  $m = l(e_1) = l(e)$  ist, dann liegt  $S_2$  auf  $y = p_y$ . Wenn  $m = l(e) \geq l(e_1)$  ist, dann bildet  $wvpS_2$  ein Parallelogramm.  $h$  liegt auf einer Diagonalen ( $d'$ ) dieses Parallelograms genau dann, wenn  $l(e) = l(e_1)$ . In diesem Fall ist das Parallelogramm eine Raute. Wenn  $l(e) \neq l(e_1)$ , dann ist wegen  $m = l(e)$  auch  $l(e_1) < l(e)$  und  $h$  ist steiler als die Diagonale  $d'$  im Parallelogramm. Dann hat  $S_2$  eine größere  $y$ -Koordinate als die Schnittpunkte von  $k(p, m)$  und  $y = p_y$  und  $h$  schneidet den Kreis  $k(p, m)$  in einem Punkt  $S_2$  mit größerer  $y$ -Koordinate als  $p_y$ .

Je kleiner  $l(e_1)$  ist (mit  $\alpha \leq 80$ ), desto weiter verschiebt sich der Kreis  $k(p, m)$  in Abbildung 16 nach unten; d.h. bei festem  $m$  verschiebt sich der Schnittpunkt  $S_2$  zu einer kleineren  $x$ -Koordinate. Falls  $p$  entlang eines Lots auf  $e$  in Richtung  $e$  verschoben wird, zieht  $p$  den Kreis  $k(p, m)$  mit sich und die  $x$ -Koordinate von  $S_2$  verkleinert sich. Ebenfalls verkleinert sich die  $x$ -Koordinate von  $S_2$ , falls  $p$  parallel zu  $e$  zu einer kleineren  $x$ -Koordinate verschoben wird. Dabei zieht  $p$  den Kreisrand mit sich. Da sich bei Verschiebung von  $p$  in beide Richtungen die  $x$ -Koordinate von  $S_2$  verkleinert und sich damit auch der Winkel  $\angle(S_2, w, v)$  minimiert, sei  $l(e_1)$  in den Koordinaten von  $p$  minimal gewählt, gemäß Lemma 4.6 also  $l(e_1) = 2l(e) \cos(\alpha)$ .

**Fall 2:**  $l(e_1) \geq l(e)$

Dann ist der Radius zunächst  $m = l(e_1)$ .

In diesem Fall schneidet  $h$  den Kreis  $k(p, l(e_1))$  mit einer kleineren  $y$ -Koordinate als  $p_y$ . Bei Verkleinerung von  $l(e_1)$  verschiebt sich also der Schnittpunkt  $S_2$  zu

Abbildung 16:  $S_2$  liegt oberhalb von  $p_y$ .

einer größeren  $y$ -Koordinate. Die minimale Vergrößerung der  $x$ -Koordinate von  $S_2$  wird dadurch ausgeglichen, dass einerseits der Radius kleiner wird und andererseits  $p$  eine kleinere  $x$ -Koordinate hat. Weil  $h$  sehr flach ist, d.h.  $\beta'' < 45$ , liegt  $S_2$  zwar unterhalb von  $y = p_y$ , aber der Abstand von  $S_2$  zu  $p_y$  ist kleiner als  $0.5p_y$ . Weil der Kreisrand oberhalb von  $0.5p_y$  in Abbildung 16 eine größere Steigung als 1, aber  $h$  eine kleinere Steigung als 1 hat, wirkt sich die Verkleinerung von  $l(e_1)$  um  $z$  bei der  $x$ -Koordinate von  $S_2$  nicht auf eine Vergrößerung um  $z$  aus, sondern auf eine deutlich kleinere Vergrößerung als  $z$ . Daher kann eine Abnahme von  $l(e_1)$  um  $z$  nicht durch den Zuwachs der  $x$ -Koordinate kompensiert werden und insgesamt erniedrigt sich die  $x$ -Koordinate von  $S_2$ , da der Radius um  $z$  abnimmt. Dementsprechend sei der Radius  $m$  minimal gewählt mit  $m := l(e)$ , selbst wenn  $l(e_1) > l(e)$ . Auch die Koordinaten von  $p$  seien minimal gewählt mit  $l(e_1) = 2l(e) \cos(\alpha)$ . Durch  $m \neq l(e_1)$ , obwohl  $l(e_1) > l(e)$  ist, kann möglicherweise ein Winkel  $\angle(S_2, w, v)$  entstehen, der für die exakte Zeichnung von  $S_2$  außerhalb der Kreise zu klein ist. Aber für eine untere Schranke des Winkels ist der mit obigen Annahmen errechnete Wert allemal ausreichend. Da er sogar noch niedriger ist als real möglich, ist er daher eine konsistente untere Schranke.

Mit der Annahme, dass der Radius des Kreises um  $p$  immer  $l(e)$  ist, liegt der Schnittpunkt  $S_2$  von  $k(p, l(e))$  und der Mittelsenkrechten  $h$  immer auf dem Kreisrand von  $k(w, l(e))$ , weil  $S_2$  zu  $p$  den gleichen Abstand hat wie zu  $w$ . Bei dem Schnitt der Kreise  $k(p, l(e))$  und  $k(w, l(e))$  entstehen zwei Schnittpunkte  $S_2$  und  $S'_2$ , wobei letzterer für die Bestimmung des minimalen Winkels  $\beta = \angle(S_2, w, v)$  irrelevant ist. Also lassen sich die Koordinaten von  $S_2$  berech-

nen durch Gleichsetzen der beiden Kreisgleichungen:

$$\begin{aligned} k(p, l(e)) &: (x - l(e_1) \cos(\alpha))^2 + (y - l(e_1) \sin(\alpha))^2 = l(e)^2 \\ k(w, l(e)) &: (x - l(e))^2 + y^2 = l(e)^2 \Rightarrow x^2 - 2l(e)x + y^2 = 0 \end{aligned}$$

Gleichsetzen der Kreisgleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} &(x - l(e_1) \cos(\alpha))^2 + (y - l(e_1) \sin(\alpha))^2 = l(e)^2 \\ \Rightarrow &x^2 - 2l(e_1) \cos(\alpha)x + l(e_1)^2 \cos^2(\alpha) \\ &\quad + y^2 - 2l(e_1) \sin(\alpha)y + l(e_1)^2 \sin^2(\alpha) = l(e)^2 \\ \Rightarrow &\underbrace{x^2 - 2l(e)x + y^2}_{=0} + \underbrace{l(e_1)^2 \cos^2(\alpha) + l(e_1)^2 \sin^2(\alpha)}_{=l(e_1)^2} \\ &\quad + 2l(e)x - 2l(e_1) \cos(\alpha)x - 2l(e_1) \sin(\alpha)y = l(e)^2 \\ \Rightarrow &2l(e)x - 2l(e_1) \cos(\alpha)x - 2l(e_1) \sin(\alpha)y + l(e_1)^2 = l(e)^2 \\ &\quad \text{mit } x = l(e) + l(e) \cos(\gamma) \text{ und } y = l(e) \sin(\gamma) \\ \Rightarrow &2l(e)^2 \cos(\gamma) - 2l(e_1)l(e) \cos(\alpha) \\ &\quad - 2l(e_1)l(e) \cos(\gamma) \cos(\alpha) - 2l(e_1)l(e) \sin(\gamma) \sin(\alpha) + l(e_1)^2 = -l(e)^2 \end{aligned}$$

mit  $l(e_1) = 2l(e) \cos(\alpha)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &2l(e)^2 \cos(\gamma) - 4l(e)^2 \cos^2(\alpha) - 4l(e)^2 \cos(\gamma) \cos^2(\alpha) \\ &\quad - 4l(e)^2 \cos(\alpha) \sin(\gamma) \sin(\alpha) + 4l(e)^2 \cos^2(\alpha) = -l(e)^2 \\ \Rightarrow &\cos(\gamma) - 2 \cos(\alpha) [\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\alpha)] = \frac{-1}{2} \\ \Rightarrow &\cos(\gamma) - 2 \cos(\alpha) \cos(\gamma - \alpha) = \frac{-1}{2} \\ \Rightarrow &\cos(\gamma) - 2 \cos\left(\frac{\gamma + 2\alpha - \gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma - (2\alpha - \gamma)}{2}\right) = \frac{-1}{2} \\ \Rightarrow &\cos(\gamma) - (\cos(\gamma) + \cos(2\alpha - \gamma)) = \frac{-1}{2} \\ \Rightarrow &\gamma = 2\alpha - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\alpha - 60 \end{aligned}$$

Es folgt  $S_2 = (l(e) + l(e) \cos(2\alpha - 60) | l(e) \sin(2\alpha - 60))$ .

□

**Herleitung der Geradengleichung  $g$  durch  $w$** 

**Behauptung 4.4.** Die Geradengleichung für die Gerade  $g$  durch  $w$  mit einer durch  $\gamma = 180 - \beta$  definierten Steigung, die für  $\gamma = 2\alpha - 60$  ( $60 \leq \alpha \leq 80$ ) durch  $S_2$  geht, ist

$$\begin{aligned}g(x) &= x \tan(\gamma) - l(e) \tan(\gamma), \quad \text{für } \gamma \neq 90, \text{ und} \\x &= l(e), \quad \text{für } \gamma = 90\end{aligned}$$

**Beweis:** Für die allgemeine Geradengleichung  $g(x) = mx + b$  werden die fehlenden Größen  $m$  und  $b$  gesucht. Sei  $\gamma \neq 90$ .

$$\begin{aligned}m &= \tan(\gamma) \\&\quad \text{und weil } w = (l(e)|0) \text{ auf } g \text{ liegt, gilt} \\b &= 0 - m \cdot l(e) = -l(e) \tan(\gamma)\end{aligned}$$

Die Geradengleichung lautet:

$$\begin{aligned}g(x) &= x \tan(\gamma) - l(e) \tan(\gamma), \quad \text{für } \gamma \neq 90, \text{ und} \\x &= l(e), \quad \text{für } \gamma = 90\end{aligned}$$

□

**Herleitung des Schnittpunktes  $S$  der zwei Kreise  $k(p, m)$  und  $k(v, l(e))$** 

**Behauptung 4.5.** Der Schnittpunkt  $S$  der Kreise  $k(p, m)$  und  $k(v, l(e))$ , der einen minimalen Winkel  $\beta = \angle(S, w, v)$  einschließt, ist

$$S = (l(e) \cos(\gamma) | l(e) \sin(\gamma)), \gamma \leq \alpha - 60.$$

Dabei gilt für den Radius  $m := \max\{l(e), l(e_1)\}$ .

**Beweis:** Seien  $m := \max\{l(e), l(e_1)\}$  und  $60 \leq \alpha \leq 120$ . Bei dem Schnitt der zwei Kreise  $k(p, m)$  und  $k(v, l(e))$  entstehen hier zwei Schnittpunkte,  $S$  und  $S'$ .  $S'$  ist allerdings für die Minimierung des Winkels  $\beta$  irrelevant und wird daher im Folgenden vernachlässigt. Sei  $\gamma = \angle(S, w, v)$ .

**Fall 1:**  $l(e_1) \geq l(e)$ , dann ist  $m = l(e_1)$ .

$k(v, l(e)) \cap k(p, l(e_1))$  bedeutet Gleichsetzen der folgenden Kreisgleichungen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l(e)^2 \\ (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 &= l(e_1)^2 \end{aligned}$$

Die Variablen  $x, y$  der Kreisgleichungen werden auf

$$x = l(e) \cos(\gamma) \text{ und } y = l(e) \sin(\gamma)$$

gesetzt. Für  $p$  gilt

$$p = (p_x | p_y) = (l(e_1) \cos(\alpha) | l(e_1) \sin(\alpha))$$

und durch Gleichsetzen der Kreisgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} &(x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 = l(e_1)^2 \\ \Rightarrow &x^2 - 2xp_x + p_x^2 + y^2 - 2yp_y + p_y^2 = l(e_1)^2 \\ \Rightarrow &\underbrace{x^2 + y^2}_{=l(e)^2} + l(e_1)^2 \underbrace{(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))}_{=1} \\ &\quad - 2(l(e_1)l(e) \cos(\alpha) \cos(\gamma) + l(e_1)l(e) \sin(\alpha) \sin(\gamma)) = l(e_1)^2 \\ \Rightarrow &-2l(e_1)l(e)(\cos(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma)) = -l(e)^2 \\ \Rightarrow &-2l(e_1)l(e)(\cos(\alpha - \gamma)) = -l(e)^2 \\ \Rightarrow &\cos(\alpha - \gamma) = \frac{l(e)}{2l(e_1)} \\ \Rightarrow &\gamma = \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{l(e)}{2l(e_1)}\right) \end{aligned}$$

**Fall 2:**  $l(e_1) \leq l(e)$ , dann ist  $m = l(e)$ .

$k(v, l(e)) \cap k(p, l(e))$  bedeutet Gleichsetzen der folgenden Kreisgleichungen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l(e)^2 \\ (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 &= l(e)^2 \end{aligned}$$

Die Variablen  $x, y$  der Kreisgleichungen werden auf

$$x = l(e) \cos(\gamma) \text{ und } y = l(e) \sin(\gamma)$$

gesetzt. Für  $p$  gilt

$$p = (p_x | p_y) = (l(e_1) \cos(\alpha) | l(e_1) \sin(\alpha))$$

und durch Gleichsetzen der Kreisgleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 &= l(e)^2 = x^2 + y^2 \\ \Rightarrow x^2 - 2xp_x + p_x^2 + y^2 - 2yp_y + p_y^2 &= x^2 + y^2 \\ \Rightarrow l(e_1)^2 \underbrace{(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))}_{=1} & \\ -2(l(e_1)l(e) \cos(\alpha) \cos(\gamma) + l(e_1)l(e) \sin(\alpha) \sin(\gamma)) &= 0 \\ \Rightarrow -2l(e_1)l(e)(\cos(\alpha) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma)) &= -l(e_1)^2 \\ \Rightarrow -2l(e_1)l(e)(\cos(\alpha - \gamma)) &= -l(e_1)^2 \\ \Rightarrow \cos(\alpha - \gamma) &= \frac{l(e_1)}{2l(e)} \\ \Rightarrow \gamma &= \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{l(e_1)}{2l(e)}\right) \end{aligned}$$

Die Koordinaten für den Schnittpunkt  $S$  hängen neben der Größe von  $\alpha$  bisher von der Relation zwischen  $l(e_1)$  und  $l(e)$  ab.

Es gilt

$$\begin{aligned} l(e_1) \leq l(e) &\Rightarrow \frac{l(e_1)}{2l(e)} \leq \frac{l(e)}{2l(e)} = 0.5 \\ &\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{l(e_1)}{2l(e)}\right) \geq 60 \\ &\Rightarrow \gamma = \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{l(e_1)}{2l(e)}\right) \leq \alpha - 60 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} l(e_1) \geq l(e) &\Rightarrow \frac{l(e)}{2l(e_1)} \leq \frac{l(e_1)}{2l(e_1)} = 0.5 \\ &\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{l(e)}{2l(e_1)}\right) \geq 60 \\ &\Rightarrow \gamma = \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{l(e)}{2l(e_1)}\right) \leq \alpha - 60 \end{aligned}$$



Es zeigt sich, dass für einen maximalen Winkel  $\gamma$  die Relation  $l(e_1) = l(e)$  gilt. Der eingeschlossene Winkel  $\beta$  ist minimal genau dann, wenn  $\gamma$  maximal ist.

$$S = (l(e) \cos(\gamma) | l(e) \sin(\gamma)), \gamma \leq \alpha - 60$$

ist der gesuchte Schnittpunkt.

□

## 4.2 Beschränkung der Länge von Kanten

**Lemma 4.6.** *Es gelten die Notationen aus Bezeichnungen 4.1.*

*Sei  $60 \leq \alpha < 90$ . Dann gilt*

$$2 \cdot \cos(\alpha) \cdot l(e) \leq l(e_1) \leq \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)} \cdot l(e)$$

*Außerdem ist  $60 \leq \alpha \leq 120$ .*

**Beweis:** Die Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $l(e_1)$  ist dadurch gegeben, dass  $l(e_1)$  mindestens so groß ist, dass der Endpunkt  $p$  von  $e_1$  auf dem Kreis  $k(w, l(e))$  liegt (A) und dass  $l(e_1)$  höchstens so groß ist, dass  $p$  auf der Mittelsenkrechten  $m_e$  von  $e$  liegt (B).

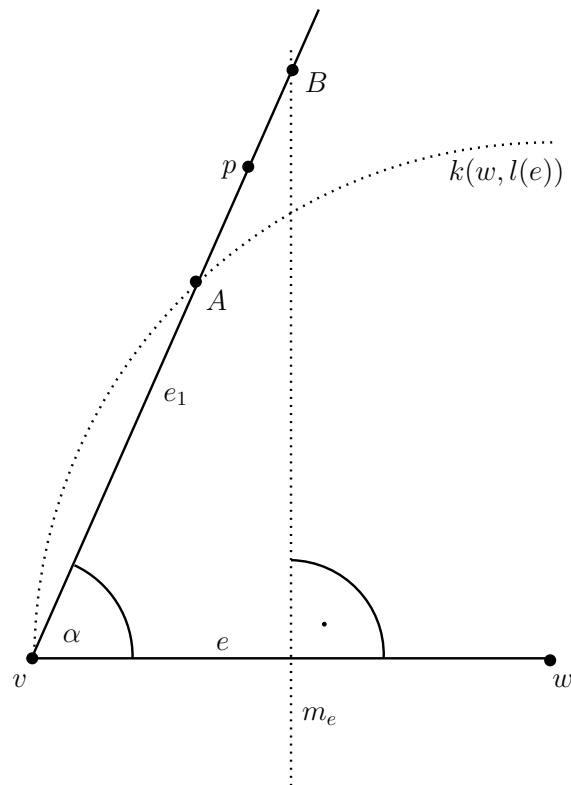


Abbildung 17: Beschränkung von  $l(e_1)$

Dagegen muss  $\alpha$  mindestens 60 sein, weil sonst  $p$  innerhalb des Kreises  $k(w, l(e))$  liegt und somit  $e$  nicht mehr zum MST gehört, oder  $e_1$  eine so große Länge hat, dass  $p$  eine größere  $x$ -Koordinate hat als  $0.5l(e)$  und damit in Abbildung 17 rechts von  $m_e$  liegt. In diesem Fall würde  $\overline{pw}$  zum MST gehören. Ist  $\alpha = 120$ , so sind alle vier gegenüberliegenden Winkel 60. Daher ist  $\alpha \leq 120$ .

Für den Punkt A gilt  $\frac{\frac{1}{2}l(e_1)}{l(e)} \geq \cos(\alpha) \Rightarrow l(e_1) \geq 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot l(e)$  und für den Punkt B gilt  $\frac{\frac{1}{2}l(e)}{l(e_1)} \geq \cos(\alpha) \Rightarrow l(e_1) \leq \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)} \cdot l(e)$ .

□

**Lemma 4.7.** *Es gelten die Notationen aus Bezeichnungen 4.1. Seien entweder  $\alpha \leq 75$  und  $\beta < 90$  oder  $\alpha < 75$  und  $\beta \leq 90$ . Dann ist die Länge  $l(e_2)$  der Kante  $e_2$  abhängig von  $\alpha$  und es gilt*

$$l(e_2) \leq l(e) \cdot b(\alpha)$$

mit

$$b(\alpha) := \left( \sin(\alpha) - \sqrt{\cos(\alpha) \cdot (2 - \cos(\alpha))} \right)$$

Für  $\alpha \leq 75$  ist  $l(e_2) \leq 0.3 \cdot l(e)$  und für  $\alpha \leq 64$  ist  $l(e_2) \leq 0.08l(e)$ .

**Beweis:** Sei  $60 \leq \alpha \leq 75$  und  $\beta < 90$ .

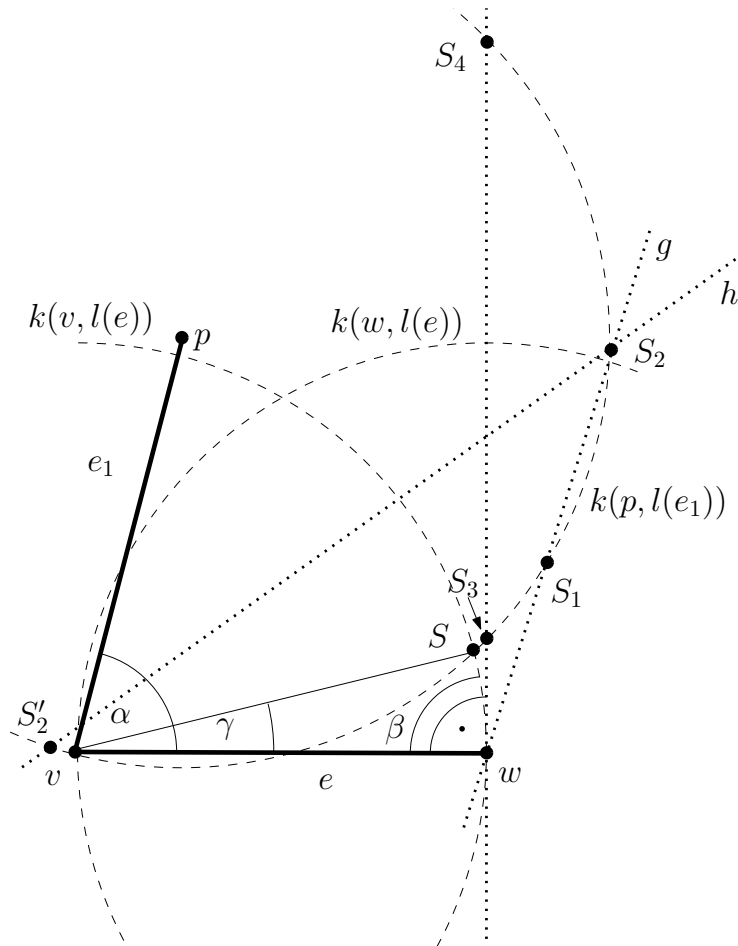


Abbildung 18: Bezeichnungen in Lemma 4.7

Laut Behauptung 4.3 ist der Schnittpunkt  $S_2$  der Mittelsenkrechten  $h$  mit dem Kreis  $k(p, m)$ ,  $m = \max\{l(e), l(e_1)\}$ , genau

$$S_2 = (l(e) + l(e) \cos(2\alpha - 60) | l(e) \sin(2\alpha - 60)).$$

Der resultierende Winkel  $\beta$ , unter dem der Endpunkt von  $e_2$  gerade in  $S_2$  platziert werden kann, ist  $\beta = 180 - (2\alpha - 60) = 240 - 2\alpha \geq 90$ . Das heißt, nur im Falle  $\beta = 90$  und  $\alpha = 75$  kann auf der Geraden  $x = l(e)$  der Endpunkt von  $e_2$  gerade im Schnittpunkt  $S_2$  platziert werden. In diesem Fall ist  $l(e_2)$  nicht wesentlich beschränkt. Mit der Voraussetzung  $\beta < 90$  ist die  $x$ -Koordinate jedes möglichen Endpunktes  $q$  von  $e_2$  kleiner als die von  $S_2$ ; daher gibt es auch keine Möglichkeit den Endpunkt von  $e_2$  mit einer größeren  $y$ -Koordinate als der von  $S_3$  zu platzieren. Dabei ist  $S_3$  der Schnittpunkt des Kreises  $k(p, m)$  mit  $x = l(e)$ , der eine kleinere  $y$ -Koordinate hat. Im Falle  $\alpha < 75$  ist  $240 - 2\alpha > 90$ . Daher kann der Endpunkt von  $e_2$  ebenfalls nicht im Schnittpunkt  $S_2$  platziert werden, selbst wenn  $\beta \leq 90$  zugelassen ist. Der Schnittpunkt  $S$  ist der Behauptung 4.5 zu entnehmen. Das Maximum von  $d(S, w)$  und  $d(S_3, w)$  definiert die obere Schranke von  $l(e_2)$ , da alle Kreise konvex sind. Der beschriebene Sachverhalt ist in Abbildung 18 nachzuvollziehen.

Zunächst wird der Schnittpunkt von  $k(p, m)$ ,  $m = \max\{l(e), l(e_1)\}$ , und  $x = l(e)$  in Abhängigkeit von  $l(e_1)$  gesucht.

$$k(p, m) : (x - l(e_1) \cos(\alpha))^2 + (y - l(e_1) \sin(\alpha))^2 = m^2, \quad m \in \{l(e), l(e_1)\}$$

An der Stelle  $x = l(e)$  ausgewertet und nach  $y$  aufgelöst ergibt sich:

$$y = l(e_1) \sin(\alpha) \mp \sqrt{m^2 - l(e)^2 + 2l(e)l(e_1) \cos(\alpha) - l(e_1)^2 \cos^2(\alpha)}$$

Entlang des Lots von  $e$  durch  $w$  gibt es zwei Schnittpunkte,  $S_3$  und  $S_4$ , wobei  $S_3$  der Schnittpunkt mit kleinerer  $y$ -Koordinate sei.

$$\begin{aligned} S_3 &:= \left( l(e)l(e_1) \sin(\alpha) - \sqrt{m^2 - l(e)^2 + 2l(e)l(e_1) \cos(\alpha) - l(e_1)^2 \cos^2(\alpha)} \right) \\ S_4 &:= \left( l(e)l(e_1) \sin(\alpha) + \sqrt{m^2 - l(e)^2 + 2l(e)l(e_1) \cos(\alpha) - l(e_1)^2 \cos^2(\alpha)} \right) \end{aligned}$$

**Fall 1:**  $l(e_1) \leq l(e)$

Dann ist  $m = l(e)$  und

$$\begin{aligned} d(S_3, w) &= l(e_1) \sin(\alpha) - \sqrt{l(e)^2 - l(e)^2 + 2l(e)l(e_1) \cos(\alpha) - l(e_1)^2 \cos^2(\alpha)} \\ &= l(e_1) \sin(\alpha) - \sqrt{l(e_1) \cos(\alpha) (2l(e) - l(e_1) \cos(\alpha))} \\ &\leq l(e_1) \sin(\alpha) - \sqrt{l(e_1) \cos(\alpha) (2l(e_1) - l(e_1) \cos(\alpha))} \\ &= l(e_1) \cdot (\sin(\alpha) - \sqrt{\cos(\alpha) \cdot (2 - \cos(\alpha))}) \\ &\leq l(e) \cdot l(\alpha) \end{aligned}$$

für  $l(\alpha) := \sin(\alpha) - \sqrt{\cos(\alpha) \cdot (2 - \cos(\alpha))}$

Es gilt

$$\max_{\alpha \in [60, 75]} l(\alpha) \leq 0.3,$$

da  $l(60) = 0$ ,  $l(75) \leq 0.294620537 \leq 0.3$  und  $l$  monoton wachsend ist:

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \alpha_2 &\Rightarrow \cos(\alpha_1) > \cos(\alpha_2) \text{ und } \sin(\alpha_1) < \sin(\alpha_2) \\ &\Rightarrow (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) < 0 \\ &\Rightarrow (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) \cdot \underbrace{(2 - \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2))}_{>0} < 0 \\ &\Rightarrow 2(\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) + (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) \cdot (-\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)) < 0 \\ &\Rightarrow 2\cos(\alpha_2) - 2\cos(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_1) < 0 \\ &\Rightarrow 2\cos(\alpha_2) - \cos^2(\alpha_2) < 2\cos(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_1) \\ &\Rightarrow \sqrt{2\cos(\alpha_2) - \cos^2(\alpha_2)} < \sqrt{2\cos(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_1)} \\ &\Rightarrow -\sqrt{2\cos(\alpha_2) - \cos^2(\alpha_2)} > -\sqrt{2\cos(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_1)} \\ &\Rightarrow \sin(\alpha_2) - \sqrt{2\cos(\alpha_2) - \cos^2(\alpha_2)} > \sin(\alpha_1) - \sqrt{2\cos(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_1)} \\ &\Rightarrow l(\alpha_2) > l(\alpha_1) \end{aligned}$$

Für  $\alpha \leq 64$  ist  $l(\alpha) \leq 0.07141 \leq 0.08$ .

**Fall 2:**  $l(e_1) \geq l(e)$

Dann ist  $m = l(e_1)$  und mit  $l(e) = 1$  gilt

$$\begin{aligned} d(S_3, w) &= l(e_1) \sin(\alpha) - \sqrt{l(e_1)^2 - l(e)^2 + 2l(e)l(e_1) \cos(\alpha) - l(e_1)^2 \cos^2(\alpha)} \\ &= l(e_1) \sin(\alpha) - \sqrt{2l(e_1) \cos(\alpha) - 1 + l(e_1)^2 \sin^2(\alpha)} =: d'(\alpha, l(e_1)) \end{aligned}$$

$d'(\alpha, l(e_1))$  ist monoton fallend bezüglich  $l(e_1)$ , da mit  $l(e_{11}) < l(e_{12})$

$$\begin{aligned} d'(\alpha, l(e_{11})) &= \frac{\sqrt{l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha)} - \sqrt{2l(e_{11}) \cos(\alpha) - 1 + l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha)}}{\sqrt{l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha)} + \sqrt{2l(e_{11}) \cos(\alpha) - 1 + l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha)}} \\ &= \frac{l(e_{11})^2 \sin^2 \alpha - (2l(e_{11}) \cos(\alpha) - 1 + l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha))}{\sqrt{l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha)} + \sqrt{2l(e_{11}) \cos(\alpha) - 1 + l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha)}} \\ &= \frac{1 - 2l(e_{11}) \cos(\alpha)}{l(e_{11}) \sin(\alpha) + \sqrt{2l(e_{11}) \cos(\alpha) - 1 + l(e_{11})^2 \sin^2(\alpha)}} \\ &\geq \frac{1 - 2l(e_{12}) \cos(\alpha)}{l(e_{12}) \sin(\alpha) + \sqrt{2l(e_{12}) \cos(\alpha) - 1 + l(e_{12})^2 \sin^2(\alpha)}} \\ &= d'(\alpha, l(e_{12})) \end{aligned}$$

für alle  $60 \leq \alpha \leq 75$  gilt.

Für den maximalen Abstand  $d'$  genügt es also  $l(e_1) = 1$  zu fixieren, und aus  $d'$  eine Funktion der Maxima bezüglich  $l(e_1)$  zu definieren. Diese Funktion heiße

$$\begin{aligned} d''(\alpha) &:= d'(\alpha, 1) \\ &= \sin(\alpha) - \sqrt{2 \cos(\alpha) - \cos^2(\alpha)} = l(\alpha) \end{aligned}$$

und für  $l$  wurde bereits Monotonie bezüglich  $\alpha$  bewiesen.

Mit der Auswertung an der Stelle  $\alpha = 75$  kann dann die Schranke von 0.3 gezeigt werden. Es gilt nämlich  $d''(75) = d'(75, 1) = l(75) \leq 0.294620537 \leq 0.3$ .

Für  $\alpha \leq 64$  ist  $d''(\alpha) = d'(\alpha, 1) = l(\alpha) \leq 0.07141 \leq 0.08$ .

Für den Schnittpunkt  $S$  der Kreise  $k(p, m)$ ,  $m = \max\{l(e), l(e_1)\}$ , und  $k(v, l(e))$  gilt  $S = (l(e) \cos(\gamma) | l(e) \sin(\gamma))$  nach Behauptung 4.5, mit  $\gamma \leq \alpha - 60$ .

$$\begin{aligned} d(S, w)^2 &= S_y^2 + (l(e) - S_x)^2 \\ &= l(e)^2 \sin^2(\gamma) + l(e)^2 - 2l(e)^2 \cos(\gamma) + l(e)^2 \cos^2(\gamma) \\ &= l(e)^2 \cdot \left( \sqrt{2(1 - \cos(\gamma))} \right)^2 \\ &\leq l(e)^2 \cdot \left( \sqrt{2(1 - \cos(\alpha - 60))} \right)^2 \\ \Rightarrow d(S, w) &\leq l(e) \cdot \sqrt{2(1 - \cos(\alpha - 60))} \\ &= l(e) \cdot l'(\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{für } l'(\alpha) := \sqrt{2(1 - \cos(\alpha - 60))}.$$

$l'$  ist monoton wachsend, da

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \alpha_2 &\Rightarrow \alpha_1 - 60 < \alpha_2 - 60 \\ &\Rightarrow \cos(\alpha_1 - 60) > \cos(\alpha_2 - 60) \\ &\Rightarrow -2 \cos(\alpha_1 - 60) < -2 \cos(\alpha_2 - 60) \\ &\Rightarrow \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha_1 - 60)} < \sqrt{2 - 2 \cos(\alpha_2 - 60)} \\ &\Rightarrow l'(\alpha_1) < l'(\alpha_2) \end{aligned}$$

Daher ist  $\max_{\alpha} l'(\alpha) \leq 0.3$  mit  $l'(75) \leq 0.262$ .

Außerdem<sup>9</sup> ist  $l(\alpha) \geq l'(\alpha) \forall 60 \leq \alpha \leq 75$  und daher ist  $l(e_2) \leq l(e)b(\alpha)$  mit  $b(\alpha) := l(\alpha)$ .

□

<sup>9</sup>Die Positivität von  $f(\alpha) := l(\alpha) - l'(\alpha) \geq 0 \forall 60 \leq \alpha \leq 75$  wurde mit dem Algebrasystem GTR Algebra FX 2.0 überprüft. Es gilt  $f(60) = 0$  und die Ableitung  $f'(\alpha) > 0 \forall 60 < \alpha \leq 75$ .

**Lemma 4.8.** *Es gelten die Notationen aus Bezeichnungen 4.1. Seien  $60 \leq \alpha < 75$  und  $90 < \beta < 240 - 2\alpha$ . Dann ist die Länge  $l(e_2)$  der Kante  $e_2$  abhängig von  $\alpha$  und es gilt*

$$l(e_2) \leq l(e) \cdot b(\alpha)$$

mit

$$b(\alpha) := \frac{\cos(\alpha) + \tan(\gamma) \sin(\alpha) - 1}{\sqrt{1 + \tan^2(\gamma)}} - \sqrt{\frac{(\cos(\alpha) + \tan^2(\gamma) + \tan(\gamma) \sin(\alpha))^2}{1 + \tan^2(\gamma)} - (\tan^2(\gamma) + 2 \tan(\gamma) \sin(\alpha))},$$

mit  $\gamma = 180 - \beta$ .

Für  $60 \leq \alpha \leq 64$  und  $90 < \beta \leq 112$  gilt  $l(e_2) \leq 0.08 \cdot l(e)$ .

**Beweis:** Sei  $60 \leq \alpha < 75$  und  $e_2 = (w, q)$ .

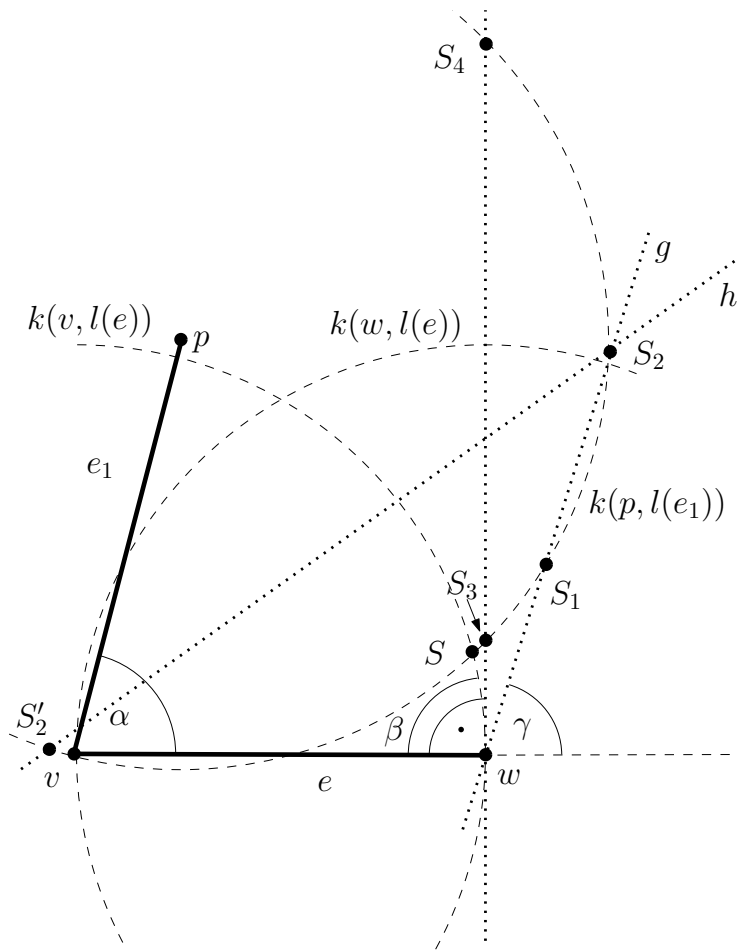


Abbildung 19: Bezeichnungen in Lemma 4.8

Behauptung 4.3 liefert den Schnittpunkt

$$S_2 = (l(e) + l(e) \cos(2\alpha - 60) | l(e) \sin(2\alpha - 60)).$$

Es gilt  $\beta = 180 - (2\alpha - 60) = 240 - 2\alpha$ . Um  $S_2$  als Endpunkt von  $e_2$  zu verhindern, ist  $\beta < 240 - 2\alpha$  notwendige Bedingung. Damit die Gerade  $g$  aus Behauptung 4.4 definiert ist, muss  $\beta \neq 90$  sein. Für  $\beta < 90$  gilt Lemma 4.7 und daher sei hier  $\beta > 90$ .

Für den Winkel  $\beta < 240 - 2\alpha$  kann der Endpunkt von  $e_2$  nur eine kleinere  $y$ -Koordinate haben als die von  $S_1$ .  $S_1$  ist der zweite Schnittpunkt von  $k(p, m)$ ,  $m = \max\{l(e), l(e_1)\}$ , und der durch  $\beta$  definierten Gerade  $g$  (durch  $w$ ) aus Behauptung 4.4. Die Länge von  $e_2$  ist dann beschränkt durch das Maximum der Distanzen  $d(S_1, w)$ ,  $d(S_3, w)$  und  $d(S, w)$ . Im Beweis von Lemma 4.7 wurde bereits  $d(S, w) \leq d(S_3, w)$  nachgewiesen. Der Kreis  $k(w, d(S_3, w))$  schneidet  $k(p, m)$  nur in  $S_3$  und einem weiteren Punkt  $S'_3$ . Die  $y$ -Koordinate von  $S'_3$  ist kleiner als die von  $S_3$ . Daher hat jeder Punkt auf dem Kreisrand von  $k(p, m)$  zwischen  $S_3$  und  $S_1$  einen größeren Abstand als  $d(S_3, w)$  zu  $w$ . Den maximalen Abstand zu  $w$  hat  $S_1$ :

$$d(S'_3, w) = d(S_3, w) \leq d(S_1, w)$$

Nun wird für  $\beta < 240 - 2\alpha$  die Länge von  $e_2$  begrenzt durch  $d(S_1, w)$ ,  $S_1$  ist der untere Schnittpunkt vom Kreis  $k(p, m)$  mit der Geraden  $g$ . Diese Gerade hat nach Behauptung 4.4 die Steigung  $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \tan(\gamma)$ , mit  $\gamma = 180 - \beta > 2\alpha - 60$ , und dementsprechend gilt für den Schnittpunkt  $S_1 = (S_{1x} | S_{1y})$ :  $S_{1x} = l(e) + \Delta_x$  und  $S_{1y} = \Delta_y$ .

Die Länge von  $e_2$  ist maximal, falls  $l(e_1) = l(e) = 1$  gewählt wird. Dies wurde für die Abstandsfunktion  $d(S_3, w)$  im Beweis von Lemma 4.7 bereits gezeigt. Sie ist bezüglich  $l(e_1)$  monoton fallend. Wenn  $l(e_1) < l(e)$  gilt und  $l(e_1)$  vergrößert wird, verschiebt sich der Mittelpunkt  $p$  des Kreises  $k(p, m)$  in Abbildung 19 nach oben. Solange  $l(e_1) < l(e)$  gilt, bleibt der Radius fest ( $m = l(e)$ ) und der Schnittpunkt  $S_1$  hat mit steigendem  $l(e_1)$  eine steigende  $y$ -Koordinate; das bedeutet, dass die Distanz  $d(S_1, w)$  wächst. Wenn  $l(e_1) \geq l(e)$  gilt und  $l(e_1)$  vergrößert wird, verschiebt sich zwar der Mittelpunkt  $p$  auch nach oben, aber die Krümmung des Kreisrandes wird an der Schnittstelle „schwächer“. Da schon  $d(S_3, w)$  durch die „schwächer“ werdende Krümmung des Kreisrandes stärker beschränkt wird ( $d(S_3, w)$  ist monoton fallend), muss  $d(S_1, w)$  ebenfalls monoton fallend sein, da sich dort die flacher werdende Krümmung stärker auswirkt. Insgesamt ist also auch hier  $d(S_1, w)$  monoton fallend und daher darf auch hier  $l(e_1) = 1$  fixiert werden.



Es gilt:

$$\begin{aligned} l(e_2)^2 &\leq \Delta_x^2 + \Delta_y^2 \\ &= \Delta_x^2 \cdot (1 + \tan^2(\gamma)) \\ \Rightarrow l(e_2) &\leq \Delta_x \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\gamma)} \end{aligned} \quad (2)$$

Die  $x$ -Koordinate  $S_{1x}$  des Schnittpunktes  $S_1$  errechnet sich durch Einsetzen der Geradengleichung<sup>10</sup> für  $g$ ,  $y = (x - 1) \tan(\gamma)$ , in die Kreisgleichung  $k(p, 1)$ :

$$\begin{aligned} (x - \cos(\alpha))^2 + (y - \sin(\alpha))^2 &= 1 \\ \Rightarrow (x - \cos(\alpha))^2 + ((x - 1) \tan(\gamma) - \sin(\alpha))^2 &= 1 \\ \Rightarrow (S_{1x} - \cos(\alpha))^2 + ((S_{1x} - 1) \tan(\gamma) - \sin(\alpha))^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Gleichung (3) nach  $S_{1x}$  umgeformt ergibt

$$\begin{aligned} S_{x1} &= \frac{\cos(\alpha) + \tan(\gamma) \sin(\alpha) - 1}{1 + \tan^2(\gamma)} \\ &\quad - \sqrt{\frac{(\cos(\alpha) + \tan^2(\gamma) + \tan(\gamma) \sin(\alpha))^2}{(1 + \tan^2(\gamma))^2} - \frac{\tan^2(\gamma) + 2 \tan(\gamma) \sin(\alpha)}{1 + \tan^2(\gamma)}} \end{aligned}$$

wobei „-“ vor der Wurzel steht, da  $S_1$  der Schnittpunkt mit der kleineren  $x$ -Koordinate ist (im Falle  $\beta > 90$ ). In  $S_{1x} = 1 + \Delta_x$  eingesetzt ergibt sich  $\Delta_x$  für die Ungleichung (2) und somit die Schranke von  $l(e_2)$ .

$$\begin{aligned} l(e_2) &\leq \Delta_x \cdot (1 + \tan^2(\gamma)) \\ &= \frac{\cos(\alpha) + \tan(\gamma) \sin(\alpha) - 1}{\sqrt{1 + \tan^2(\gamma)}} \\ &\quad - \sqrt{\frac{(\cos(\alpha) + \tan^2(\gamma) + \tan(\gamma) \sin(\alpha))^2}{1 + \tan^2(\gamma)} - (\tan^2(\gamma) + 2 \tan(\gamma) \sin(\alpha))} \\ &=: b'(\alpha, \gamma) \end{aligned}$$

Mit  $\gamma = 180 - (240 - 2\alpha) = 2\alpha - 60$  liefert  $b'(\alpha, \gamma)$  eine obere Schranke. Wegen der Skalierung  $l(e) := 1$  gilt für beliebige Länge von  $l(e)$

$$l(e_2) \leq l(e) \cdot b(\alpha)$$

mit  $b(\alpha) := b'(\alpha, 2\alpha - 60)$ . Falls der zu  $\alpha$  benachbarte Winkel  $\alpha'$  ebenfalls höchstens 75 ist, gilt mit Lemma 4.7  $\beta' \geq 120 - 0.5\alpha'$  und  $\gamma = 180 - \beta' \leq 60 + 0.5\alpha'$ . Mit diesem  $\gamma$  liefert  $b$  eine deutlich kleinere obere Schranke.

Es gilt sogar

$$60 \leq \alpha \leq 64, 90 < \beta \leq 112 \Rightarrow l(e_2) \leq 0.08 \cdot l(e).$$

□

<sup>10</sup>Die Herleitung für  $g$  ist in Behauptung 4.4 ausgeführt.

**Lemma 4.9.** *Es gelten die Notationen aus Bezeichnungen 4.1.*

*Seien  $\beta_1 \geq \underline{\beta}$  und  $\beta'_1 \geq \underline{\beta}$  mit der unteren Schranke  $\underline{\beta} \geq 82.5$ ,  $l(e_2) \leq b \cdot l(e)$  mit  $b$  aus Lemma 4.7 oder Lemma 4.8. Dann ist*

$$l(e_i) \leq c(\beta_1, \beta'_1) \cdot b \cdot l(e)$$

mit

$$c(\beta_1, \beta'_1) := \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))}$$

und

$$1 \leq c(\beta_1, \beta'_1) \leq 2$$

für jede adjazente Kante  $e_i$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ .

**Beweis:**

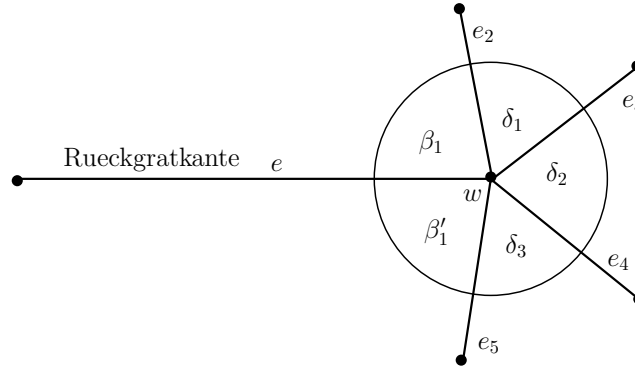


Abbildung 20: Bezeichnungen der Winkel und Beine um  $w$

Seien  $\underline{\beta} \geq 82.5$  und  $e$  eine Rückgrat-Kante mit ausgehenden Winkeln  $\beta_1 \geq \underline{\beta}$  und  $\beta'_1 \geq \underline{\beta}$ . Sei ferner  $l(e_2) \leq b \cdot l(e)$  mit  $b$  aus Lemma 4.7 oder Lemma 4.8. Es gilt für die drei anliegenden Winkel  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ :

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 &= 360 - \beta_1 - \beta_2 \\ &= 180 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta_2) \leq 195 \\ &\Rightarrow (90 - \beta_1) + (90 - \beta_2) \leq 15 \end{aligned}$$

Also ist

$$1 = \frac{1}{2 \cos(60)} \leq \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))} \leq \frac{1}{2 \cos(75)} < 2 \quad \forall \beta_1, \beta'_1 \geq \underline{\beta}.$$

$$\text{Definiere } c(\beta_1, \beta'_1) := \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))}.$$

**Fall 1:**  $l(e_2)$ -Beschränkung

$$\begin{aligned} l(e_2) &\leq bl(e) = \frac{1}{2 \cos 60} bl(e) \\ &\leq \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))} bl(e) \\ &= c(\beta_1, \beta'_1) bl(e) < 2bl(e) \end{aligned}$$

**Fall 2:**  $l(e_3)$ -Beschränkung

Es gilt  $\delta_1 = 360 - \delta_2 - \delta_3 - \beta_1 - \beta'_1 \leq 60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) \leq 75$ . Daher ist

$$\begin{aligned} l(e_3) &\leq \frac{1}{2 \cos(\delta_1)} l(e_2) \\ &\leq \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))} bl(e) \\ &= c(\beta_1, \beta'_1) bl(e) < 2bl(e). \end{aligned}$$

**Fall 3:**  $l(e_4)$ -Beschränkung

Gesucht ist das Minimum von  $\cos(\delta_1) \cdot \cos(\delta_2)$ , mit  $\delta_1 + \delta_2 \leq 120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) \leq 135$ , d.h.  $\delta_1, \delta_2 \in [60, 60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1)] \subseteq [60, 75]$ .

$$\cos(\delta_1) \cdot \cos(\delta_2) \geq \cos(\delta_1) \cdot \cos(120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) - \delta_1) =: f(\delta_1)$$

$f$  ist extremal, falls

$$\begin{aligned} f'(\delta_1) = 0 &\Leftrightarrow -\sin(\delta_1) \cos(120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) - \delta_1) + \\ &\quad \cos(\delta_1) \sin(120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) - \delta_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) - 2\delta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \delta_1 = \frac{120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1)}{2} \end{aligned}$$

An dieser Stelle ist  $f$  allerdings maximal, da

$$\begin{aligned} &f''\left(\frac{120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1)}{2}\right) \\ &= -2 \cos\left(120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) - 2 \frac{120 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1)}{2}\right) \\ &= -2 \cos(0) = -2 < 0. \end{aligned}$$

Daher kann für das Minimum von  $f$  und damit für das Minimum des Produktes  $\cos(\delta_1) \cdot \cos(\delta_2)$  nur eine Belegung von  $\delta_1$  und  $\delta_2$  mit Werten vom Rand des

Intervalls gewählt werden, d.h.  $\delta_1 = 60$  und  $\delta_2 = 60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) \leq 75$  oder umgekehrt. In jedem Fall ist  $\cos(\delta_1) \cos(\delta_2) \geq 0.5 \cdot \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))$  und es gilt

$$\begin{aligned} l(e_4) &\leq \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_2)} \cdot l(e_3) \leq \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_1)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_2)} \cdot l(e_2) \\ &\leq \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))} \cdot b \cdot l(e) \\ &= c(\beta_1, \beta'_1)bl(e) < 2bl(e) \end{aligned}$$

**Fall 4:**  $l(e_5)$ -Beschränkung

Gesucht ist das Minimum von  $\cos(\delta_1) \cdot \cos(\delta_2) \cdot \cos(\delta_3)$  und dieses ist genau dann erreicht, wenn die Winkel mit Werten des Intervallrandes belegt werden, d.h. mit  $\delta_i = 60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1) \leq 75$  für ein  $i \in \{1, 2, 3\}$  und  $\delta_j = 60$  für  $j \neq i$ . Die Herleitung folgt analog zu Fall 3 und es gilt

$$\begin{aligned} l(e_5) &\leq \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_3)} \cdot l(e_4) \leq \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_2)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_3)} \cdot l(e_3) \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_1)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_2)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos(\delta_3)} \cdot l(e_2) \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))} \cdot b \cdot l(e) \\ &= \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))} \cdot b \cdot l(e) \\ &= c(\beta_1, \beta'_1)bl(e) < 2bl(e) \end{aligned}$$

□

**Lemma 4.10.** *Es gelten die Notationen aus Bezeichnungen 4.1.*

*Seien  $l(e_1) \geq 10l(e)$ ,  $88 \leq \alpha \leq 92$  und  $88 \leq \beta \leq 92$ . Dann ist  $l(e_2) \leq 0.09l(e)$ .*

*Für  $75 \leq \alpha \leq 105$  und  $75 \leq \beta \leq 105$  ist  $l(e_2)$  durch  $0.4 \cdot l(e)$  beschränkt.*

**Beweis:** Seien  $0 \leq x^* \leq 15$  und

$$90 - x^* \leq \alpha \leq 90 + x^* \text{ und } 90 - x^* \leq \beta \leq 90 + x^*.$$

Um  $l(e_2)$  zu maximieren, sei  $x^*$  maximal und  $\alpha = 105 = \beta$  gewählt, sowie  $l(e_1) = 10l(e)$ . Falls  $l(e_1)$  größer ist als  $10l(e)$ , liegt der Kreisbogen flacher und begrenzt  $l(e_2)$  noch stärker. Die Bezeichnungen sind analog zu Abbildung 21 und es seien  $v = (0|0)$ ,  $p = (p_x|p_y) = (-10l(e)|0)$  und

$$w = (w_x|w_y) = (l(e) \cos(90 - x^*) | l(e) \sin(90 - x^*)).$$

Gesucht ist  $Q_x$ , die  $x$ -Koordinate des Schnittpunkts des Kreises  $k(p, l(e_1))$  mit der Geraden  $g = qw$  mit Steigung  $2x^*$ .

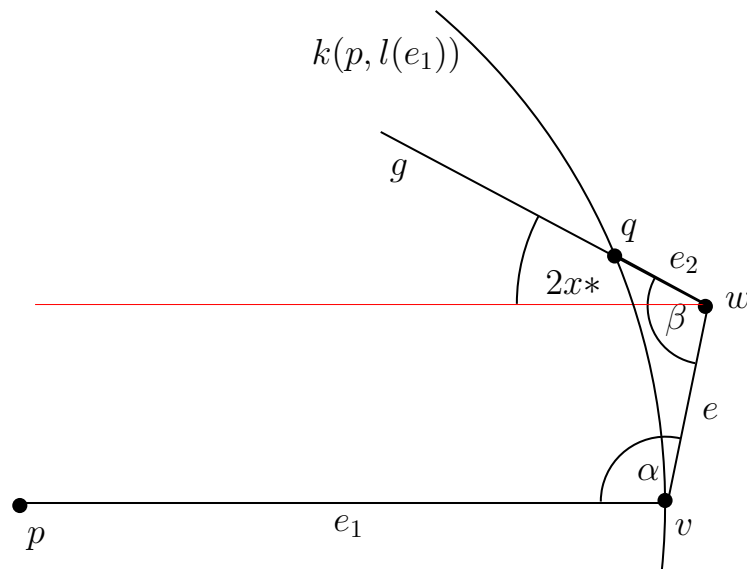


Abbildung 21:  $l(e_2)$  wird durch Kreis  $k(p, l(e_1))$  beschränkt

$$g(x) = ax + b, \text{ mit}$$

$$a = -\tan(2x^*) \text{ und}$$

$$b = w_y + \tan(2x^*) \cdot w_x = l(e)(\sin(90 - x^*) + \tan(2x^*) \cos(90 - x^*))$$

$g(x)$  wird in  $k(p, l(e_1)) : (x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 = l(e_1)^2$  eingesetzt und  $l(e_1) = 10l(e)$  gesetzt, dass die obere Schranke maximal ist. Dies ergibt:

$$(x + 10l(e))^2 + (g(x))^2 = (10l(e))^2$$

$$\Rightarrow (-\tan(2x^*)x + l(e)(\sin(90 - x^*) + \tan(2x^*) \cos(90 - x^*)))^2 + (x + 10l(e))^2 = 100l(e)^2$$

Mit  $l(e) = 1$  ergibt sich

$$x^2 + 20x + 100 + \tan^2(2x^*)x^2 - 2 \tan(2x^*)x(\sin(90 - x^*) + \tan(2x^*) \cos(90 - x^*)) + (\sin(90 - x^*) + \tan(2x^*) \cos(90 - x^*))^2 = 100$$

$$\Rightarrow (1 + \tan^2(2x^*))x^2 + 2 \cdot (10 - \tan(2x^*) \sin(90 - x^*) - \tan^2(2x^*) \cos(90 - x^*))x + (\sin(90 - x^*) + \tan(2x^*) \cos(90 - x^*))^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\tan^2(2x^*) \cos(90 - x^*) + \tan(2x^*) \sin(90 - x^*) - 10}{1 + \tan^2(2x^*)} \pm \sqrt{t}$$

mit  $t = \left( \frac{10 - \tan(2x^*) \sin(90 - x^*) - \tan^2(2x^*) \cos(90 - x^*)}{1 + \tan^2(2x^*)} \right)^2 - \frac{(\sin(90 - x^*) + \tan(2x^*) \cos(90 - x^*))^2}{1 + \tan^2(2x^*)}$

Für die weitere Berechnung wird als Vorzeichen „+“ vor der Wurzel gewählt, weil der zweite Schnittpunkt eine kleinere  $x$ -Koordinate hat.

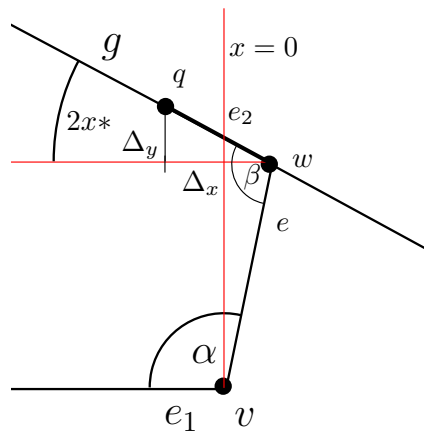


Abbildung 22: Detailansicht der Bezeichnungen

Es gilt  $\frac{\Delta_x}{l(e_2)} \geq \cos(2x^*)$  und mit  $\Delta_x = |x| + \cos(90 - x^*)$ , da  $v = (0|0)$ , folgt sofort

$$l(e_2) \leq \frac{\Delta_x}{\cos(2x^*)} = \frac{|x| + \cos(90 - x^*)}{\cos(2x^*)}$$

$l(e_2)$  darf deshalb kleiner gewählt werden, da der Endpunkt von  $e_2$  nicht zwingend auf dem Kreisrand von  $k(p, l(e_1))$  liegen muss.

$$x^* = 2 \Rightarrow l(e_2) \leq 0.0858 \leq 0.09$$

$$x^* = 15 \Rightarrow l(e_2) \leq 0.376 \leq 0.4$$

□

### 4.3 Beschränkung der Größe von Winkeln

**Lemma 4.11.** *Es gelten die Notationen aus Bezeichnungen 4.1.*

*Sei  $60 \leq \alpha \leq 80$ . Dann gilt  $\beta \geq 120 - 0.5 \cdot \alpha$ .*

**Beweis:** Nach Lemma 4.6 sei  $p$  bereits richtig platziert bezüglich der MST-Bedingung 2.16, sodass  $d(p, w) \geq l(e) = d(v, w)$  ist. Für eine zulässige Platzierung des Endpunktes  $q$  von  $e_2$  muss  $d(q, v) \geq l(e)$  gelten, d.h.  $q$  muss außerhalb von  $k(v, l(e))$  liegen. Außerdem muss  $d(p, q) \geq \max\{l(e), l(e_1)\} =: m$  gelten, d.h.  $q$  liegt außerhalb von  $k(p, m)$ . Zusätzlich muss  $d(q, w) \leq d(p, q)$  gelten, weil sonst die MST-Bedingung 2.16 verletzt wird. Daher liegen  $p$  und  $q$  auf unterschiedlichen Seiten der Mittelsenkrechten  $h$ , in Abbildung 23. Diese Bedingungen führen dazu, dass es nur zwei Möglichkeiten gibt den Endpunkt  $q$  von  $e_2$  mit minimalem Winkel  $\angle(q, w, v)$  zu platzieren. Entweder liegt  $q$  im Schnittpunkt  $S_2$  des Kreises  $k(p, m)$  mit der Mittelsenkrechten  $h$  oder im Schnittpunkt  $S$  des Kreises  $k(v, l(e))$  mit  $k(p, m)$ . Das Minimum der beiden Schranken definiert die untere Schranke für  $\beta$ .

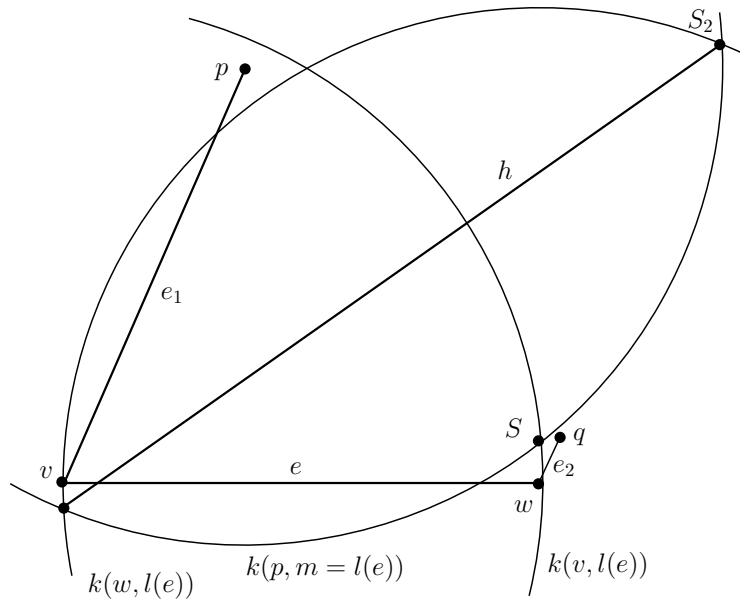


Abbildung 23:  $S$  definiert den minimalen Winkel für  $\beta$

Im ersten Fall liefert Behauptung 4.3 den Schnittpunkt  $S_2$  des Kreises  $k(p, m)$  mit der Mittelsenkrechten  $h$ . Es gilt

$$S_2 = (l(e) + l(e) \cos(2\alpha - 60) | l(e) \sin(2\alpha - 60))$$

Der Radius von  $k(p, m)$  wurde minimal gewählt, sodass  $S_2$  minimale  $x$ -Koordinate hat. Es ergibt sich

$$\beta \geq 180 - (2\alpha - 60) = 240 - 2\alpha =: \beta_1 \geq 80$$



Für die Platzierung des Endpunktes von  $e_2$  in  $S_2$  gilt die untere Schranke  $\beta_1$  für  $\beta$ .

Der Schnittpunkt  $S = (S_x|S_y)$  wird in Behauptung 4.5 geliefert. Er ist abhängig vom Verhältnis zwischen  $l(e_1)$  und  $l(e)$ . Es wurde in Behauptung 4.5 bereits gezeigt, dass für eine minimale  $x$ -Koordinate von  $S$  nun  $l(e_1) = l(e)$  gilt. Dann gilt  $\tan \beta = \frac{S_y}{l(e) - S_x}$  und  $\beta$  ist nur noch abhängig von der genauen Position von  $S$ .

$$S = (l(e) \cos(\gamma) | l(e) \sin(\gamma)) \text{ mit } \gamma \leq \alpha - 60$$

In beiden Fällen ( $l(e_1) \geq l(e)$  und  $l(e_1) \leq l(e)$ ) gilt

$$\begin{aligned} \beta &\geq \tan^{-1} \left( \frac{S_y}{l(e) - S_x} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{l(e) \sin(\gamma)}{l(e)(1 - \cos(\gamma))} \right) \\ &\geq \tan^{-1} \left( \frac{\sin(\alpha - 60)}{1 - \cos(\alpha - 60)} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{0 - \sin(\alpha - 60)}{-1 + \cos(\alpha - 60)} \right) \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{\sin(180) + \sin(60 - \alpha)}{\cos(180) + \cos(60 - \alpha)} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\frac{\sin 180 + \sin(60 - \alpha)}{2 \cdot \cos\left(\frac{180 - (60 - \alpha)}{2}\right)}}{\frac{\cos 180 + \cos(60 - \alpha)}{2 \cdot \cos\left(\frac{180 - (60 - \alpha)}{2}\right)}} \right) \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{\sin\left(\frac{180 + (60 - \alpha)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{180 + (60 - \alpha)}{2}\right)} \right) = \tan^{-1} \left( \tan\left(\frac{180 + (60 - \alpha)}{2}\right) \right) \\ &= 120 - 0.5\alpha =: \beta_2 \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $\tan^{-1}$  monoton wachsend ist, d.h.

$$\tan^{-1}(x') \leq \tan^{-1}(x) \Leftrightarrow \left( \frac{\sin \delta'}{1 - \cos \delta'} \right) =: x' \leq x := \left( \frac{\sin \delta}{1 - \cos \delta} \right) \Leftrightarrow \delta' \geq \delta$$

Für  $\delta' = \alpha - 60$  und  $\delta = \gamma$  ist die Äquivalenz erfüllt.

Für die Platzierung des Endpunktes von  $e_2$  in  $S$  gilt die untere Schranke  $\beta_2$  für  $\beta$ .

Wenn  $\alpha = 80$  folgt aus beiden unteren Schranken  $(\beta_1, \beta_2)$   $\beta \geq 80$  und der Endpunkt von  $e_2$  kann sowohl in  $S_2$  als auch in  $S$  platziert werden. In beiden Fällen stimmt die Ungleichung. Falls  $\alpha < 80$ , ist

$$\beta_1 - \beta_2 = 240 - 2\alpha - (120 - 0.5\alpha) = 120 - 1.5\alpha > 0.$$

Dann ist  $\beta_1$  größer als  $\beta_2$  und das Minimum der beiden Schranken liefert die endgültige untere Schranke für  $\beta$ , also  $\beta \geq 120 - 0.5\alpha$ .

□

**Lemma 4.12.** *Es gelten die Notationen aus Bezeichnungen 4.1.*

*Seien  $88 = \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha} = 92$ ,  $l(e_1) \geq 10l(e)$  und  $l(e_0) \geq 10l(e_1)$  für die Rückgrat-Kanten  $e_0 = (u, v)$ ,  $e_1 = (v, w)$  und  $e = (w, q)$ . Dann ist  $\beta \geq \underline{\alpha}$ .*

**Beweis:** Seien  $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ ,  $l(e_1) \geq 10l(e)$ ,  $l(e_0) \geq 10l(e_1) \geq 100l(e)$  für die Rückgrat-Kanten  $e_0 = (u, v)$ ,  $e_1 = (v, w)$  und  $e = (w, q)$ .

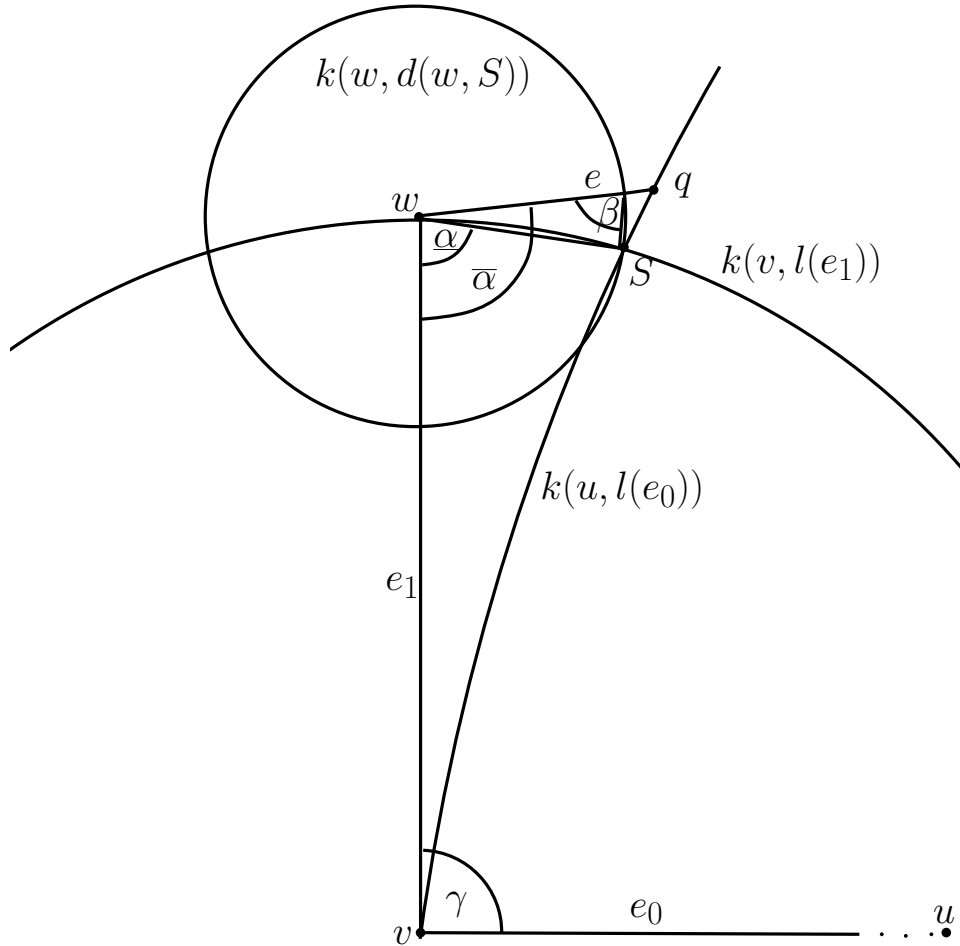


Abbildung 24: Begrenzung der Fläche für die Fortsetzung der Raupe

Es ist  $\bar{\alpha} = 180 - \underline{\alpha}$ , wobei  $\underline{\alpha}$  durch den Schnittpunkt  $S$  der Kreise  $k(u, l(e_0))$  und  $k(v, l(e_1))$  definiert ist, vergleiche Abbildung 24. Weder der Endpunkt  $q$  von  $e$  noch weitere (folgende) Punkte der Raupe können innerhalb der Kreise  $k(u, l(e_0))$  und  $k(v, l(e_1))$  platziert werden, d.h. die untere Schranke für  $\alpha$  kann durch die Platzierung von  $q$  nicht unterschritten werden. Falls  $60 \leq \gamma \leq 64$ , ist  $l(e)$  gemäß Lemma 4.8 durch  $0.08l(e_1)$  beschränkt. Falls  $88 \leq \gamma \leq 92$ , ist  $l(e)$  gemäß Lemma 4.10 durch  $0.09l(e_1)$  beschränkt. In beiden Fällen wird  $l(e)$  durch  $k(u, l(e_0))$  beschränkt und daher kann die Raupe nicht um den Kreis  $k(u, l(e_0))$  herum fortgesetzt werden. Ist  $e$  eine Rückgrat-Kante, so müssen alle folgende Punkte in dem von  $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}$  und  $k(u, e_0)$  begrenzten Gebiet platziert

werden. Ist  $e$  keine Rückgrat-Kante, so muss lediglich das vierte Bein in diesem Bereich platziert werden.

$\beta$  ist minimal, wenn der Anfangspunkt von  $e_2$  auf der durch  $\bar{\alpha}$  definierten Geraden und der Endpunkt von  $e_2$  auf der durch  $\underline{\alpha}$  definierten Geraden liegt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\beta &\geq \cos^{-1}(\sin(0.5(\bar{\alpha} - \underline{\alpha}))) \\ &= \cos^{-1}(\cos(90 - 0.5\bar{\alpha} + 0.5\underline{\alpha})) \\ &= 90 - 0.5\bar{\alpha} + 0.5\underline{\alpha} \\ &= 0.5 \cdot 180 - 0.5\bar{\alpha} + 0.5\underline{\alpha} \\ &= 0.5(180 - \bar{\alpha}) + 0.5\underline{\alpha} \\ &= 0.5\underline{\alpha} + 0.5\underline{\alpha} = \underline{\alpha}\end{aligned}$$

□

## 5 Flächenschränken für 5-reguläre Bäume

In diesem Kapitel werden Flächenschränken für eine Teilmenge der Graphenklasse mit 5-regulären Bäumen untersucht. Dabei handelt es sich um vollständige 5-reguläre Bäume der Tiefe vier, an deren Blättern 5-reguläre Raupen anknüpfen. Für diese Graphenklasse wird eine untere Flächenschränke für den Platzbedarf einer MST-Einbettung bewiesen.

### 5.1 Untere Flächenschränke

**Definition 5.1.** Sei  $e = (v, w) \in E$  eine ausgehende Kante von  $v \in V$  auf einem Pfad von der Wurzel zu einem Knoten des Baumes  $B = (V, E)$ . Seien  $\alpha$  und  $\alpha'$  zwei an  $e$  anliegende benachbarte Winkel, die bei  $v$  liegen. Dann heißen  $\alpha$  und  $\alpha'$  *ausgehende Winkel*. Seien  $\beta$  und  $\beta'$  zwei an  $e = (v, w) \in E$  anliegende benachbarte Winkel, die bei  $w$  liegen. Dann heißen  $\beta$  und  $\beta'$  *eingehende Winkel*.

**Lemma 5.2.** *An der Wurzel eines vollständigen 5-regulären Baumes existieren zwei benachbarte Winkel  $\alpha, \alpha' \leq 80$  mit  $\alpha + \alpha' \leq 150$ .*

**Beweis:** Der drittgrößte Winkel  $\alpha_j$  ist  $\leq 80$ , da im Falle  $\alpha_j = 80 + \epsilon$ , mit  $0 < \epsilon < 280$ , zwei weitere Winkel existieren, die jeweils  $> 80$  sind. Damit bleibt für die letzten beiden Winkel zusammen nur noch eine Summe von höchstens  $120 - 3\epsilon < 120$  übrig. Da aber jeder Winkel mindestens 60 ist (Lemma 4.6), liegt hier ein Widerspruch vor.

#### Fall 1:

Die drei größten Winkel liegen nebeneinander und gegenüber von ihnen gibt es zwei Winkel  $\alpha, \alpha'$ , die  $\leq 75$  bzw.  $\leq 72$  sind und zusammen  $\leq 147 \leq 150$ .

#### Fall 2:

Die drei größten Winkel liegen nicht nebeneinander. Sei  $\alpha_j = \alpha$  und sein kleinerer Nachbar sei  $\alpha'$ . Es macht keinen Unterschied ob  $\alpha'$  der viertgrößte Winkel oder der kleinste Winkel ist, in beiden Fällen ist dieser Winkel  $\leq 75$ . Also sind beide Winkel jeweils höchstens 80. Und da der kleinste Winkel mindestens 60 ist, müssen die vier größten Winkel  $\leq 300$  sein, d.h. der drittgrößte und der viertgrößte sind zusammen  $\leq 150$ .

Es gilt  $\alpha + \alpha' \leq 150$  und beide sind jeweils  $\leq 80$ .

□

**Lemma 5.3.** *In einem vollständigen 5-regulären Baum existiert in der Tiefe vier ein Knoten, an dem die ausgehenden Winkel  $\alpha, \alpha' \leq 62$  sind.*

**Beweis:** Nach Lemma 5.2 existieren zwei Winkel  $\alpha, \alpha' \leq 80$  mit der Summe  $\alpha + \alpha' \leq 150$ .

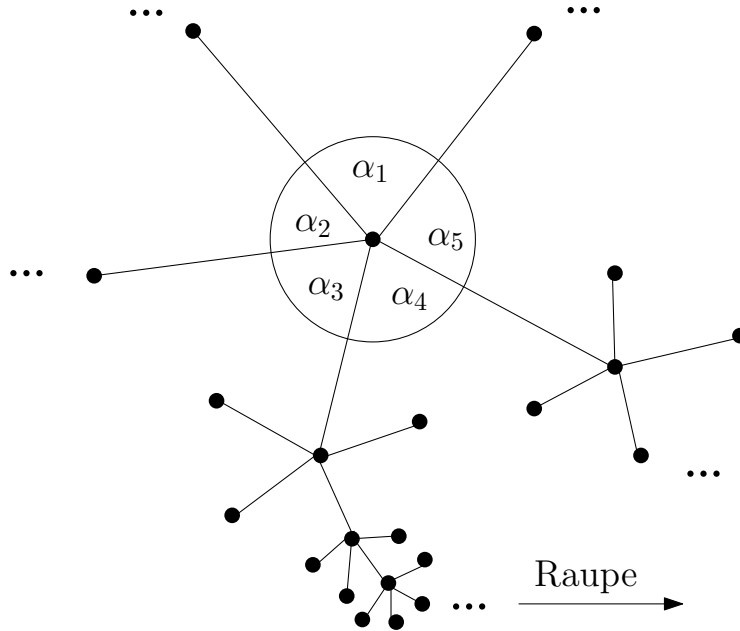


Abbildung 25: Vollständiger 5-regulärer Baum mit anschließender Raupe

Auf  $\alpha$  und  $\alpha'$  wird Lemma 4.11 angewendet. Dies ergibt zwei eingehende Winkel  $\beta \geq 120 - 0.5\alpha$  und  $\beta' \geq 120 - 0.5\alpha'$ . Daher ist

$$\beta + \beta' \geq 240 - 0.5(\alpha + \alpha') \geq 165.$$

Für die drei gegenüberliegenden Winkel  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  gilt dann:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 360 - (\beta + \beta') \leq 195.$$

Da jeder Winkel mindestens 60 ist, haben je zwei benachbarte Winkel eine Summe von höchstens  $195 - 60 = 135$ . Eines dieser Paare sei das Paar der nächsten ausgehenden Winkel  $\alpha^{(1)}, \alpha'^{(1)}$ . Insbesondere ist  $\alpha^{(1)} \leq 75$  und  $\alpha'^{(1)} \leq 75$ .

Für  $\alpha^{(1)}, \alpha'^{(1)}$  wird nochmals Lemma 4.11 angewendet analog zu  $\alpha, \alpha'$  und es ergeben sich mit gleicher Rechnung zwei weitere ausgehende Winkel  $\alpha^{(2)}, \alpha'^{(2)}$  mit  $\alpha^{(2)} + \alpha'^{(2)} \leq 127.5$  und einzeln  $\leq 67.5$ . Nach nochmaliger Anwendung von Lemma 4.11 gilt für die nächsten ausgehenden Winkel  $\alpha^{(3)}, \alpha'^{(3)}$  eine Summe  $\alpha^{(3)} + \alpha'^{(3)} \leq 123.75$  und beide sind jeweils  $\leq 63.75$ . Nach einer vierten Anwendung von Lemma 4.11 ergeben sich  $\alpha^{(4)}, \alpha'^{(4)}$  mit  $\alpha^{(4)} + \alpha'^{(4)} \leq 121.875$  und beide sind jeweils höchstens  $61.875 \leq 62$ .

□

**Satz 5.4.** *Ein vollständiger 5-regulärer Baum der Tiefe vier mit 5-regulären Raupen, die an den Blättern des Baumes anknüpfen, kann als MST nur mit exponentiellen Platzbedarf eingebettet werden, d.h. mit der unteren Flächenschranke*

$$2^{\Omega(n)}.$$

**Beweis:** An die Blätter eines vollständigen 5-regulären Baumes der Tiefe vier werden 5-reguläre Raupen angehängt. Nach Lemma 5.3 existiert ein Pfad zu einem Blatt der Tiefe vier, an dem eine 5-reguläre Raupe mit kleinen ausgehenden Winkeln anknüpft. Der Pfad kann entlang der Knoten der Raupe, die inzident zu Rückgrat-Kanten sind, fortgesetzt werden und erhält dadurch seine Richtung. Entlang dieser Richtung erfolgen die Argumente dieses Beweises.

Der vollständige 5-reguläre Baum hat  $1 + 5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4^3 = 426$  Knoten und an jedem der  $5 \cdot 4^3 = 320$  Knoten in der Tiefe vier ist eine Raupe mit  $\frac{n-426}{320} + 1 = \frac{n-106}{320}$  Knoten angeschlossen. Falls eine sich anschließende Raupe also exponentiellen Platz benötigt, dann exponentiell bezüglich der Anzahl der Knoten  $\frac{n-106}{320} = O(n)$ .

Es ist zu beachten, dass bereits auf  $\alpha^{(3)}$  und  $\alpha'^{(3)}$  im Beweis von Lemma 5.3 das Lemma 4.11 angewendet wurde und deshalb Lemma 4.9 eine obere Schranke für die nächste Rückgrat-Kante liefert. Da beide Winkel  $\leq 64$  sind, ist die Schranke  $\leq 0.1$ . Diese Beobachtung ist nötig, um eine der Voraussetzungen für die folgenden Fälle zu gewährleisten.

In dem Durchlauf der Raupe wird bei jeder Rückgrat-Kante einer der folgenden zwei Fälle angewendet. Der Durchlauf beginnt mit dem Knoten auf der Tiefe vier des vollständigen 5-regulären Baumes, der zwei ausgehende Winkel  $\alpha = \alpha^{(4)}$  und  $\alpha' = \alpha'^{(4)}$  hat. Für die erste Rückgrat-Kante wird dann Fall 1 angewendet. Die betrachtete Rückgrat-Kante sei  $e$  und ihre ausgehenden Winkel  $\alpha, \alpha'$ , wie in Abbildung 26. Für die Anwendung jedes Falles gilt die Voraussetzung, dass die vorhergehende Rückgrat-Kante  $l(e_1) \geq 10l(e)$  ist. Für Fall 2 gilt zusätzlich die Voraussetzung  $l(e_0) \geq 10l(e_1)$  für die Rückgrat-Kante  $e_0$  vor  $e_1$ .

**Fall 1:** Die Rückgrat-Kante  $e$  hat zwei ausgehende Winkel  
 $60 \leq \alpha, \alpha' \leq 62$ .

**Fall 2:** Die Rückgrat-Kante  $e$  hat zwei ausgehende Winkel  $\alpha, \alpha'$  mit  
 $60 \leq \alpha \leq 62$  und  $89 \leq \alpha' \leq 91$ .

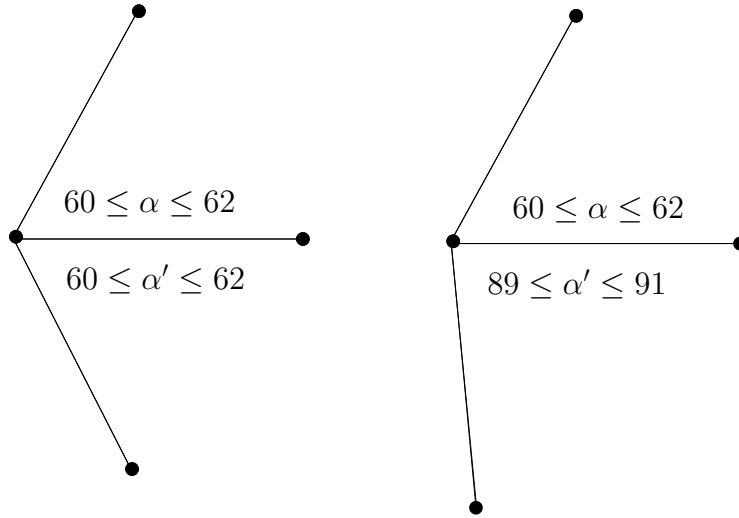


Abbildung 26: links: Fall 1, rechts: Fall 2

**Fall 1:** Seien  $60 \leq \alpha, \alpha' \leq 62$ .

Nach Lemma 4.11 gilt für die ausgehenden Winkel  $\beta \geq 120 - 0.5\alpha \geq 89$  und  $\beta' \geq 120 - 0.5\alpha' \geq 89$ . Dann sind die gegenüberliegenden Winkel

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 360 - \beta - \beta' \leq 120 + 0.5(\alpha + \alpha') \leq 182.$$

Das bedeutet, dass insbesondere jeder dieser Winkel  $\leq 62$  ist und je zwei benachbarte Winkel in der Summe  $\leq 122$  sind. Weiter sind  $\beta$  und  $\beta'$  auch nach oben beschränkt, nämlich durch

$$\begin{aligned} \beta &\leq 360 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \beta' \leq 91 \text{ und} \\ \beta' &\leq 360 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \beta \leq 91 \end{aligned}$$

Da  $\beta$  und  $\beta'$  nicht zugleich  $> 90$  sein können, ist zumindest einer der beiden Winkel  $\leq 90$ . Dies sei ohne Einschränkung<sup>11</sup>  $\beta$ . Mit  $\alpha \leq 62$  ist nach

$$\text{Lemma 4.7 : } l(e_2) \leq b(\alpha) \cdot l(e) \leq 0.08 \cdot l(e).$$

Mit  $\beta = 89 \leq \beta_1, \beta_2$  folgt  $60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta_2) \leq 62$  und nach Anwendung von Lemma 4.9 ist

$$l(e') \leq b(62) \cdot \frac{1}{2 \cos(62)} \cdot l(e) \leq 0.08 \cdot 1.07 \cdot l(e) \leq 0.1 \cdot l(e)$$

für jede adjazente Kante  $e'$ .

Zur Wiederherstellung der Voraussetzungen gilt:

<sup>11</sup>Für die Wahl von  $\beta'$  erfolgt die Argumentation in anderer zyklischer Richtung.

Für die Position 2 oder 3 der weiterführenden Rückgrat-Kante  $e'$  gemäß der Orientierung aus 2.9 kann Fall 1 wieder angewendet werden mit zwei benachbarten der drei Winkel  $\delta_i$ . Diese seien die neuen ausgehenden Winkel  $\alpha, \alpha'$ .

Für die Position 1 oder 4 der weiterführenden Rückgrat-Kante  $e'$  gemäß der Orientierung aus 2.9 kann Fall 2 angewendet werden mit den zwei ausgehenden Winkeln  $\alpha = \beta$  und  $\alpha' = \delta_1$  oder  $\alpha = \delta_3$  und  $\alpha' = \beta'$ .

**Fall 2:** Seien  $60 \leq \alpha \leq 62$  und  $89 \leq \alpha' \leq 91$ .

Nach Lemma 4.11 gilt  $\beta \geq 120 - 0.5\alpha \geq 89$ . Nach Lemma 4.12 ist  $\beta' \geq 89$ , also die untere Schranke von  $\alpha'$ . Dieses Lemma ist hier anwendbar, da gemäß der Voraussetzung die vorherige Rückgrat-Kante  $l(e_1) \geq 10l(e)$  ist. Das folgt, da vor Fall 2 mindestens einmal Fall 1 angewendet wurde. Außerdem ist die Rückgrat-Kante  $e_0$ , die vor  $e_1$  liegt, ebenfalls mindestens 10 mal so groß wie  $l(e_1)$ , da die ausgehenden Winkel an der Kante  $e_0$  ja schon  $\leq 64$  sind und nach Lemma 4.9 eine obere Schranke von  $0.1l(e_0)$  für  $l(e_1)$  liefern. Nun sind die gegenüberliegenden Winkel

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 360 - \beta - \beta' \leq 120 + 0.5(\alpha + \alpha') \leq 182.$$

Das bedeutet, dass insbesondere jeder dieser Winkel  $\leq 62$  ist und je zwei benachbarte in der Summe  $\leq 122$  sind.

Es gibt für  $\beta$  eine obere Schranke, nämlich  $360 - \beta' - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \leq 91$ . Mit Lemma 4.8 ist dann  $l(e_2)$  beschränkt durch  $0.08l(e)$  für  $\alpha \leq 62$  und für  $\beta \leq 91$ . Außerdem ist auch  $\beta' \leq 360 - \beta - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \leq 91$  nach oben beschränkt.

Mit  $\beta = 89 \leq \beta_1, \beta_2$  folgt  $60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta_2) \leq 62$  und nach Anwendung von Lemma 4.9 ist

$$l(e') \leq 0.08 \cdot l(e) \cdot \frac{1}{2 \cos 62} \leq 0.1 \cdot l(e)$$

für jede adjazente Kante  $e'$ .

Zur Wiederherstellung der Voraussetzungen gilt:

Für die Position 2 oder 3 der weiterführenden Rückgrat-Kante  $e'$  gemäß der Orientierung aus 2.9 kann Fall 1 angewendet werden mit zwei benachbarten der drei Winkel  $\delta_i$ . Diese seien die neuen ausgehenden Winkel  $\alpha, \alpha'$ .

Für die Position 1 oder 4 der weiterführenden Rückgrat-Kante  $e'$  gemäß der Orientierung aus 2.9 kann Fall 2 angewendet werden mit den ausgehenden Winkeln  $\alpha = \beta$  und  $\alpha' = \delta_1$  oder  $\alpha = \delta_3$  und  $\alpha' = \beta'$ .

Mehrfache Iteration von Fall 2 führt dann zu einer lokalen Schnecke oder einem lokalen Zick-Zack. Für ein schwaches Zick-Zack muss ausschließlich Fall 1 mit



alternierender Wahl zwischen Position 2 und 3 der weiterführenden Rückgrat-Kante angewendet werden.

### Die Länge der Raupe:

Weist man der Länge der letzten Rückgrat-Kante den Wert 1 zu, ist die Länge der  $i$ -ten Rückgratkante von hinten gesehen  $\geq 10^i$ , weil  $l(e)' \leq 0.1 \cdot l(e)$  für alle nachfolgenden Rückgrat-Kanten  $e'$  bezüglich  $e$  ist. Die Raupe hat, wie oben bereits berechnet,  $\frac{n-106}{320} = O(n)$  Knoten. Eine Raupe mit  $m$  Knoten hat  $m - 1$  Kanten und  $\frac{m+2}{4}$  Rückgrat-Kanten. Also enthält die Raupe  $\frac{\frac{n-106}{320}+2}{4} = \frac{n+534}{1280}$  Rückgrat-Kanten. Die längste Rückgrat-Kante der Raupe hat die Länge  $l$

$$l \geq 10^{\frac{n+534}{1280}-1} = 10^{\frac{n-746}{1280}} \geq 0.26 \cdot 1.0018^n$$

für die Anzahl der Knoten  $n$  des vollständigen 5-regulären Baumes der Tiefe vier mit anschließenden Raupen.

Weil die Betrachtung der Raupe erst ab der Tiefe vier des vollständigen 5-regulären Baumes beginnt, vergrößert sich der minimale Platzbedarf der längsten Kante im Vergleich zu  $l$  gemäß der Einbettungsregel 3.8:

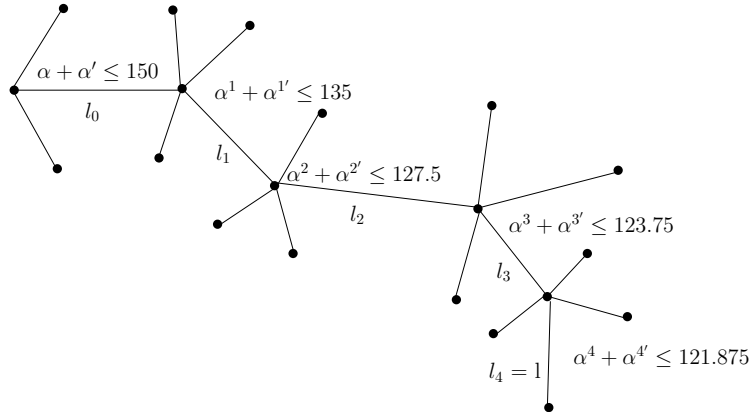


Abbildung 27: Ein Pfad des vollständigen 5-regulären Baumes

Es ist  $\theta_0 = 12, \theta_1 = \frac{12}{15}, \theta_2 = \frac{4}{75}, \theta_3 = \frac{4}{1125}$  und  $l_i = \frac{3l_{i+1}}{\theta_i}$ .

Für  $l_4 = l \geq 0.26 \cdot 10^{\frac{n-746}{1280}}$  ist

$$\begin{aligned} l_3 &= \frac{3 \cdot l \cdot 75 \cdot 15}{4} \geq 843.75 \cdot 10^{\frac{n-746}{1280}} \geq 219.375 \cdot 1.0018^n \\ l_2 &= \frac{3 \cdot l_3 \cdot 75}{4} \geq 56.25 \cdot l_3 \geq 12339.84375 \cdot 1.0018^n \\ l_1 &= \frac{3 \cdot l_2 \cdot 15}{12} \geq 3.75 \cdot l_2 \geq 46274.414 \cdot 1.0018^n \\ l_0 &= \frac{3 \cdot l_1}{12} \geq 0.25 \cdot l_1 \geq 11568.6035 \cdot 1.0018^n \end{aligned}$$

Die längste Kante ist  $l_1 \geq 46274 \cdot 1.0018^n$  lang und somit ist für die Fläche zum Zeichnen dieses Graphen ein Quadrat mit Seitenlänge  $k$

$$k = \frac{l_1}{\sqrt{2}} \geq 32720 \cdot 1.0018^n = 2^{\log_2 32720 + (\log_2 1.0018) \cdot n} = 2^{\Omega(n)}$$

nötig, dass die längste Kante  $l_1$  auf der Diagonalen des Quadrats platziert werden kann.

□

## 5.2 Obere Flächenschranke

**Satz 5.5.** *Für jeden Baum mit maximalem Knotengrad 5 gibt es eine MST Einbettung mit quadratisch exponentiellem Platzbedarf, d.h.*

$$2^{O(k^2)},$$

wobei  $k$  die Tiefe des Baumes ist.

**Beweis:** Siehe [MS].

## 6 Verfeinerung der Flächenschranke

Der Beweis von Satz 5.4 zeigt, dass ein vollständiger 5-närer Baum der Tiefe vier mit 5-regulären Raupen an den Blättern nur mit exponentiellem Platzbedarf als MST eingebettet werden kann. Beim Aufstellen der Lemmata wurden unterschiedliche Beobachtungen gemacht. Dabei wurde deutlich, dass der Platzbedarf noch stärker begrenzt ist, nämlich quadratisch exponentiell. Diese Beobachtungen werden in diesem Abschnitt vorgestellt und deren Behauptungen bewiesen.

### 6.1 Verfeinerung der Beschränkung von Winkelgrößen

Für den Satz 5.4 wurden zwei Fälle (Fall 1 und Fall 2) unterschieden, deren Voraussetzungen immer eingehalten werden. Die Schranken für Winkel und Längen waren jedoch immer maximal gewählt. Hier wird nun gezeigt, dass bei genauerer Rechnung die obere Schranke der Winkel kleiner wird und die Längen der Rückgrat-Kanten stärker beschränkt sind als nur durch den Faktor 0.1. Beides liegt aber immernoch innerhalb der Voraussetzungen.

**Definition 6.1.** Sei  $R$  eine Raupe mit Wurzel  $r$  und Länge (Tiefe)  $n$ . Sei  $v \in V$  mit Tiefe  $i$ . Der Knoten  $v$  wird dann *Level- $i$ -Knoten* genannt. Die Kantenmenge  $E$  der Raupe  $R = (V, E)$  sei so unterteilt, dass

- $E = E_0 \dot{\cup} E_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E_{n-1}$  eine disjunkte Vereinigung ist,
- $(v, w) = e \in E_i \Leftrightarrow v, w \in V$  und  $v$  ist Level- $i$ -Knoten und  $w$  ist Level- $i + 1$ -Knoten.
- $e \in E_i$  heiße *Level- $i$ -Kante* und wird mit  $e^{(i)}$  bezeichnet ( $i = 0, \dots, n - 1$ ).

**Definition 6.2.** Sei  $\alpha_i$  ein ausgehender Winkel an einer Level- $i$ -Kante, der nur innerhalb einer unteren Schranke  $\underline{\alpha}_i$  und einer oberen Schranke  $\overline{\alpha}_i$  zugelassen ist. Der *Spielraum* eines Winkels  $\alpha_i$  ist  $x_i := x_i(\alpha_i) := \overline{\alpha}_i - \underline{\alpha}_i$ . Entsprechend ist der Spielraum  $x_i$  eines Winkelpaares  $(\alpha_i, \alpha'_i)$  definiert:

$$x_i := x_i(\alpha_i, \alpha'_i) := (\overline{\alpha}_i + \overline{\alpha'_i}) - (\underline{\alpha}_i + \underline{\alpha'_i}) \quad \forall i = 0, \dots, n - 1.$$

**Definition 6.3.** Sei  $e = (v, w) \in E_i$  eine eingehende Rückgrat-Kante des Knoten  $w$ . Sei  $x_i$  der Spielraum eines ausgehenden Winkelpaares  $\alpha_i, \alpha'_i$ . Dann hat einer der beiden Winkel einen Spielraum  $\leq 0.5x_i$ .

Falls der Spielraum von  $\alpha_i$  kleiner gleich  $0.5x_i$  ist, dann ist die Länge der Level- $(i + 1)$ -Kante  $e_2$  an Position 1 gemäß Lemma 4.7 oder Lemma 4.8 beschränkt.

Die obere Schranke war für  $e_2 \in E_{i+1}$  mit  $l(e) \cdot b(\alpha_i)$  bezeichnet und wird im Folgenden nur noch in Abhängigkeit von  $x_i$  als  $b_i$  bezeichnet.

Es gilt  $\alpha_i \leq 60 + 0.5x_i$  und  $l(e_2) \leq l(e) \cdot b_i$  mit

$$b_i := b(60 + 0.5x_i) \geq b(\alpha_i) \quad \forall i = 0, \dots, n-2$$

und  $b_i \leq b(\alpha'_i)$ .

Falls der Spielraum von  $\alpha'_i$  kleiner gleich  $0.5x_i$  ist, dann ist die Level- $(i+1)$ -Kante  $e_5$  an Position 4 gemäß Lemma 4.7 oder Lemma 4.8 beschränkt. Die obere Schranke war für  $e_5 \in E_{i+1}$  mit  $l(e) \cdot b(\alpha'_i)$  bezeichnet und wird im Folgenden nur noch in Abhängigkeit von  $x_i$  als  $b_i$  bezeichnet.

Es gilt  $\alpha'_i \leq 60 + 0.5x_i$  und  $l(e_5) \leq l(e) \cdot b_i$  mit

$$b_i := b(60 + 0.5x_i) \geq b(\alpha'_i) \quad \forall i = 0, \dots, n-2$$

und  $b_i \leq b(\alpha_i)$ .

In beiden Fällen hat  $b_i$  den gleichen Wert. Die Berechnung hängt zwar von der Wahl des ausgehenden Winkels für den Beschränkungsfaktor ab, nicht aber sein Wert.

Der Faktor  $c(\beta_1, \beta'_1) = \frac{1}{2 \cos(60 + (90 - \beta_1) + (90 - \beta'_1))}$  aus Lemma 4.9 ist für jedes eingehende Winkelpaar  $(\beta_i, \beta'_i)$  definiert und kann in Abhängigkeit des Spielraumes  $x_{i+1}$  ausgedrückt werden. Für die eingehenden Winkel  $\beta_i$  und  $\beta'_i$  am Level- $(i+1)$ -Knoten gilt die obere Schranke von 180, da die gegenüberliegenden Winkel jeweils mindestens 60 sein müssen. Dann ist der Spielraum  $x_{i+1} = 180 - \beta_i - \beta'_i = (90 - \beta_i) + (90 - \beta'_i)$ . Es sei also  $c_{i+1}$  definiert durch

$$c_{i+1} := c(x_{i+1}) := \frac{1}{2 \cos(60 + x_{i+1})} \quad \forall i = 0, \dots, n-1$$

Die Länge einer Level- $i$ -Kante  $e \in E_i$  sei weiterhin mit  $l(e)$  bezeichnet und gemäß Lemma 4.9 ist die Länge von  $e$  beschränkt durch

$$l(e) \leq c_i \cdot b_{i-1} \cdot l(e') \leq k_i \cdot l(e'),$$

wobei  $e' \in E_{i-1}$  eine Level- $(i-1)$ -Kante ist und

$$k_i := c_i \cdot b_{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

Es ist hervorzuheben, dass die Länge einer Level- $i$ -Kante von zwei unterschiedlichen Spielräumen abhängt.

**Lemma 6.4.** Seien  $60 \leq \alpha_i \leq 75$ ,  $60 \leq \alpha'_i \leq 75$  zwei ausgehende Winkel an der Rückgrat-Kante  $e = (v, w) \in E_i$ . Es gelte  $\alpha_i + \alpha'_i \leq 120 + x_i$ , mit Spielraum  $x_i \leq 20$ . Die eingehenden Winkel bei  $e$  seien  $\beta_i$  und  $\beta'_i$ . Dann gilt für die ausgehenden Winkel  $\alpha_{i+1}$  und  $\alpha'_{i+1}$  der Rückgrat-Kante  $e' \in E_{i+1}$  an Position 2 oder 3

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 120 + 0.5x_i$$

und an Position 1

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 60 + \underline{\alpha_{i+1}} + 0.5x_i, \quad \alpha_{i+1} = \beta_i, \quad \alpha'_{i+1} = \delta_{i+1}^{(1)} \geq 60$$

und an Position 4

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 60 + \underline{\alpha'_{i+1}} + 0.5x_i, \quad \alpha'_{i+1} = \beta'_i, \quad \alpha_{i+1} = \delta_{i+1}^{(3)} \geq 60.$$

Insgesamt ist  $x_{i+1}(\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1}) \leq 0.5 \cdot x_i(\alpha_i, \alpha'_i)$ .

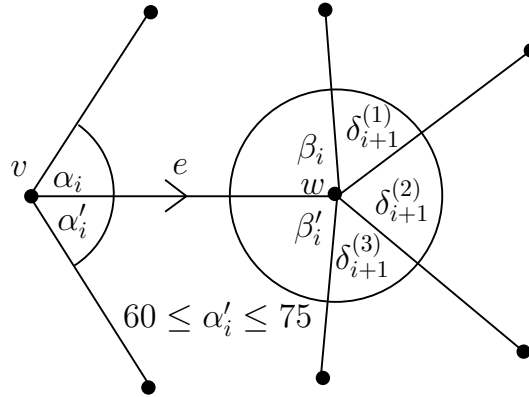


Abbildung 28: Bezeichnungen des Lemma 6.4

**Beweis:** Seien  $60 \leq \alpha_i \leq 75$  und  $60 \leq \alpha'_i \leq 75$  zwei ausgehende Winkel mit  $\alpha_i + \alpha'_i \leq 120 + x_i$ ,  $x_i \leq 20$ . Nach Lemma 4.11 gilt  $\beta_i \geq 120 - 0.5\alpha_i = \underline{\beta_i}$  und  $\beta'_i \geq 120 - 0.5\alpha'_i = \underline{\beta'_i}$  für die eingehenden Winkel  $\beta_i$  und  $\beta'_i$ . Für die bezüglich  $\beta_i$  und  $\beta'_i$  gegenüber liegenden Winkel  $\delta_{i+1}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sei  $\underline{\delta_{i+1}^{(j)}} = 60$  die untere Schranke.

Für den Spielraum  $x_{i+1}$  gilt:

$$\beta_i + \beta'_i + \delta_{i+1}^{(1)} + \delta_{i+1}^{(2)} + \delta_{i+1}^{(3)} = 360 \Rightarrow \underline{\beta_i} + \underline{\beta'_i} + \underline{\delta_{i+1}^{(1)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(2)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(3)}} + x_{i+1} = 360$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 360 - (\underline{\beta_i} + \underline{\beta'_i} + \underline{\delta_{i+1}^{(1)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(2)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(3)}}) \\ &\leq 360 - 120 + 0.5\alpha_i - 120 + 0.5\alpha'_i - 180 \\ &= -60 + 0.5(\alpha_i + \alpha'_i) \leq 0.5x_i \end{aligned}$$

Für die zwei benachbarten ausgehenden Winkel der Rückgrat-Kante  $e' \in E_{i+1}$  bleibt also nur ein Spielraum von höchstens  $0.5x_i$ . Daher ist im Falle der Rückgrat-Kante an Position 2 oder 3

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 120 + x_{i+1} \leq 120 + 0.5x_i.$$

Falls die Rückgrat-Kante an Position 1 liegt, ist  $\alpha_{i+1} = \beta_i$  und  $\alpha'_{i+1} = \delta_{i+1}^{(1)}$  mit

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq \underline{\alpha}_{i+1} + 60 + 0.5x_i$$

Falls die Rückgrat-Kante an Position 4 liegt, ist  $\alpha_{i+1} = \delta_{i+1}^{(3)}$  und  $\alpha'_{i+1} = \beta'_i$  mit

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq \underline{\alpha}'_{i+1} + 60 + 0.5x_i.$$

□

**Lemma 6.5.** Seien  $60 \leq \alpha_i \leq 75$ ,  $\alpha'_i \leq \alpha'_i \leq \overline{\alpha}'_i$  zwei ausgehende Winkel an der Rückgrat-Kante  $e = (v, w) \in \overline{E}_i$ . Die beiden ausgehenden Winkel  $\alpha_i, \alpha'_i$  haben den gemeinsamen Spielraum  $x_i = x_i(\alpha_i, \alpha'_i) \leq 4$  und es gelte  $88 =: \underline{\alpha}'_i$  und  $\overline{\alpha}'_i := 92$ . Die eingehenden Winkel bei  $e$  seien  $\beta_i$  und  $\beta'_i$ . Dann gilt für die ausgehenden Winkel  $\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1}$  der Rückgrat-Kante  $e' \in E_{i+1}$  an Position 2 oder 3

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 120 + 0.5x_i$$

und an Position 1

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 60 + \underline{\alpha}_{i+1} + 0.5x_i, \quad \alpha_{i+1} = \beta_i, \quad \alpha'_{i+1} = \delta_{i+1}^{(1)} \geq 60$$

und an Position 4

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 60 + \underline{\alpha}'_{i+1} + 0.5x_i, \quad \alpha'_{i+1} = \beta'_i, \quad \alpha_{i+1} = \delta_{i+1}^{(3)} \geq 60.$$

Insgesamt ist  $x_{i+1}(\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1}) \leq 0.5 \cdot x_i(\alpha_i, \alpha'_i)$ .

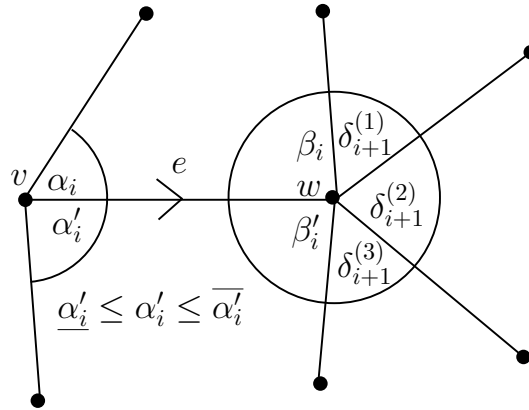


Abbildung 29: Bezeichnungen des Lemma 6.5

**Beweis:** Seien  $60 \leq \alpha_i \leq 75$  und  $\alpha_i \leq \alpha'_i \leq \overline{\alpha'_i}$  und  $x_i \leq 4$  sei der Spielraum von  $\alpha_i + \alpha'_i$ . Sei  $\alpha_i = 60 + x'_i$  und  $\alpha'_i = \alpha'_i + x''_i$  mit  $x'_i + x''_i \leq x_i$ . Nach Lemma 4.11 gilt  $\beta_i \geq 120 - 0.5\alpha_i = 120 - 0.5(60 + x'_i) = 90 - 0.5x'_i$  für den eingehenden Winkel  $\beta_i$ . Nach Lemma 4.12 ist mit  $\overline{\alpha'_i} = \alpha'_i + x''_i$  und  $x''_i \leq 4$  dann  $\beta'_i \geq 90 - 0.5x''_i$  der zweite eingehende Winkel. Für die bezüglich  $\beta_i$  und  $\beta'_i$  gegenüber liegenden Winkel  $\delta_{i+1}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sei  $\underline{\delta_{i+1}^{(j)}} = 60$  die untere Schranke.

Für den Spielraum  $x_{i+1}$  gilt:

$$\beta_i + \beta'_i + \delta_{i+1}^{(1)} + \delta_{i+1}^{(2)} + \delta_{i+1}^{(3)} = 360 \Rightarrow \underline{\beta_i} + \underline{\beta'_i} + \underline{\delta_{i+1}^{(1)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(2)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(3)}} + x_{i+1} = 360$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 360 - (\underline{\beta_i} + \underline{\beta'_i} + \underline{\delta_{i+1}^{(1)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(2)}} + \underline{\delta_{i+1}^{(3)}}) \\ &\leq 180 - (90 - 0.5x'_i) - (90 - 0.5x''_i) \\ &= 0.5(x'_i + x''_i) \leq 0.5x_i \end{aligned}$$

Für die zwei benachbarten ausgehenden Winkel der Rückgrat-Kante  $e' \in E_{i+1}$  bleibt also nur ein Spielraum von höchstens  $0.5x_i$ . Daher ist im Falle der Rückgrat-Kante an Position 2 oder 3

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq 120 + x_{i+1} \leq 120 + 0.5x_i.$$

Falls die Rückgrat-Kante an Position 1 liegt, ist  $\alpha_{i+1} = \beta_i$  und  $\alpha'_{i+1} = \delta_{i+1}^{(1)}$  mit

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq \underline{\alpha_{i+1}} + 60 + 0.5x_i$$

Falls die Rückgrat-Kante an Position 4 liegt, ist  $\alpha_{i+1} = \delta_{i+1}^{(3)}$  und  $\alpha'_{i+1} = \beta'_i$  mit

$$\alpha_{i+1} + \alpha'_{i+1} \leq \underline{\alpha'_{i+1}} + 60 + 0.5x_i.$$

□

**Satz 6.6.** *Der Spielraum eines ausgehenden Winkelpaares an der Rückgrat-Kante  $e' \in E_{i+1}$  ist höchstens halb so groß wie der Spielraum  $x_i \leq 4$  des ausgehenden Winkelpaares an der Rückgrat-Kante  $e \in E_i$ , d.h.*

$$x_{i+1} \leq 0.5 \cdot x_i.$$

**Beweis:** Nach Lemma 6.4 und 6.5 halbiert sich der Spielraum  $x_i$  der ausgehenden Winkelpaare  $\alpha_i, \alpha'_i$  der Rückgrat-Kante aus  $e_{i+1}$  für jedes Winkelpaar  $\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1}$ . Dabei werden sowohl die Voraussetzungen der beiden Fälle in Kapitel 5 berücksichtigt und eingehalten, als auch alle Möglichkeiten für die Fortsetzung der Raupe.

□

## 6.2 Verfeinerung des Beschränkungs-faktors der Kantenlängen

**Satz 6.7.** Sei  $x_i \leq 4$  der Spielraum des ausgehenden Winkel-paares  $\alpha_i, \alpha'_i$  an der Level- $i$ -Kante  $e \in E_i$ . Sei  $x_{i+1} \leq 4$  der Spielraum des ausgehenden Winkel-paares  $\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1}$  an der Level- $i + 1$ -Kante  $e' \in E_{i+1}$ . Sei  $l(e') \leq k_{i+1} \cdot l(e)$  und  $k_{i+1} = c_{i+1} \cdot b_i$  mit  $i = 0, \dots, n - 2$ . Dann gilt

$$k_{i+1} \leq 0.5 \cdot k_i \quad \forall i = 0, \dots, n - 2$$

und induktiv

$$k_{i+1} \leq \frac{k_0}{2^{i+1}} \quad \forall i = 0, \dots, n - 2$$

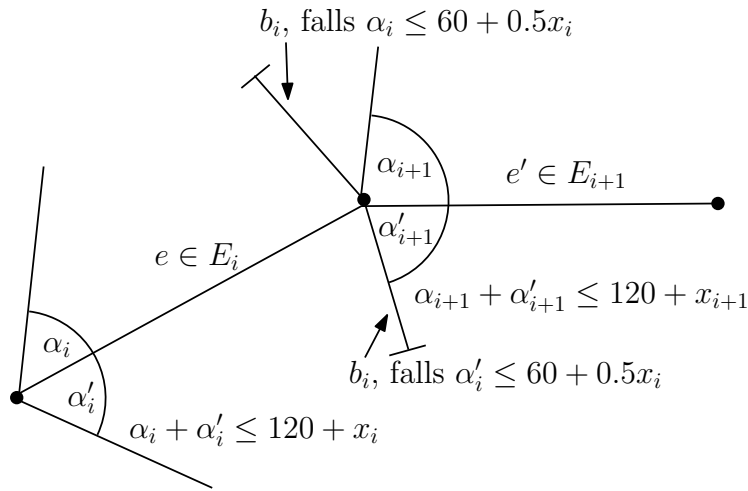


Abbildung 30: Bezeichnungen der Voraussetzungen von Satz 6.7

**Beweis:** Sei  $x_i \leq 4$  der Spielraum des ausgehenden Winkel-paares  $\alpha_i, \alpha'_i$  an der Level- $i$ -Kante  $e \in E_i$ . Sei  $x_{i+1} \leq 4$  der Spielraum des ausgehenden Winkel-paares  $\alpha_{i+1}, \alpha'_{i+1}$  an der Level- $(i + 1)$ -Kante  $e' \in E_{i+1}$ . Sei  $l(e') \leq k_i \cdot l(e)$  und  $k_i = c_i \cdot b_{i-1}$  mit  $i = 1, \dots, n - 2$ .

Gemäß Satz 6.6 halbiert sich der Spielraum mit jedem Level, d.h.  $x_{i+1} \leq 0.5x_i$  für  $i = 0, \dots, n - 2$ .

Weil  $c(x) = \frac{1}{2 \cos(60+x)}$  monoton wachsend ist, gilt

$$c_{i+1} = c(x_{i+1}) \leq c(0.5x_i) \leq c(x_i) = c_i \quad \forall i = 1, \dots, n - 2.$$

Weil der Bechränkunsfaktor  $b(x)$  aus Definition 6.3 monoton wachsend ist, wie im Beweis von Lemma 4.7 und Lemma 4.8 gezeigt wurde, gilt

$$b(60 + 0.5x_{i+1}) \leq b(60 + 0.5^2x_i) \quad \forall i = 0, \dots, n - 2.$$



Nun sei die Differenzfunktion  $f$  wie folgt definiert:

$$f(x_i) := 0.5b(60 + 0.5x_i) - b(60 + 0.5^2x_i).$$

$f(x_i)$  ist positiv für jedes  $i = 0, \dots, n - 2$ . Die Positivität ist unabhängig von der Wahl für  $b$ . Dies gilt sowohl für  $b$  aus Lemma 4.7, als auch für  $b$  aus Lemma 4.8, was mit einem Algebrasystem<sup>12</sup> festgestellt wurde.

Daher gilt auch

$$b(60 + 0.5^2x_i) \leq 0.5b(60 + 0.5x_i)$$

und insgesamt also

$$b_{i+1} = b(60 + 0.5x_{i+1}) \leq b(60 + 0.5^2x_i) \leq 0.5b(60 + 0.5x_i) = 0.5b_i \quad \forall i = 0, \dots, n-3.$$

Nun ist die Level- $(i + 1)$ -Kante  $e'$  folgendermaßen beschränkt:

$$\begin{aligned} l(e') &\leq k_{i+1} \cdot l(e) \\ &= c(x_{i+1}) \cdot b(60 + 0.5x_i) \cdot l(e) \\ &\leq c(x_i) \cdot b(60 + 0.5x_i) \cdot l(e) \\ &\leq c(x_i) \cdot 0.5b(60 + 0.5x_{i-1}) \cdot l(e) \\ &= 0.5 \cdot (c(x_i) \cdot b(x_{i-1})) \cdot l(e) \\ &= 0.5 \cdot k_i \cdot l(e) \quad \forall i = 1, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

Weil die Abnahme des Spielraums  $x_{i+1} \leq 0.5x_i$  für jedes  $i = 1, \dots, n - 2$  gilt, ist induktiv auch

$$k_i \leq \frac{k_0}{2^i} \quad \forall i = 1, \dots, n - 1$$

□

---

<sup>12</sup>Die Positivität von  $f$  wurde mit dem Algebrasystem GTR Algebra FX 2.0 sowohl für  $b$  aus Lemma 4.7 als auch für  $b$  aus Lemma 4.8 überprüft. In Lemma 4.8 wurde  $\gamma = 60 + 0.5\alpha$  gewählt.

### 6.3 Verfeinerung der unteren Flächenschranke

**Satz 6.8.** *Die untere Flächenschranke einer MST-Einbettung eines vollständigen 5-regulären Baumes der Tiefe vier mit 5-regulären Raupen an den Blättern ist*

$$2^{\Omega(n^2)}.$$

**Beweis:** Es gilt  $l(e') \leq k_{i+1} \cdot l(e)$  mit  $e' \in E_{i+1}$  und  $e \in E_i$  für alle  $i = 0, \dots, n-2$ . Der Faktor ist gemäß Satz 6.7  $k_{i+1} \leq \frac{k_0}{2^{i+1}}$ . Sei  $e^{(j)} \in E_j$ . Dann ist per Induktion die Länge einer Level- $j$ -Kante  $e^{(j)}$  beschränkt durch

$$\begin{aligned} l(e^{(j)}) &\leq k_j \cdot l(e^{(j-1)}) \\ &= \left( \prod_{i=1}^j k_i \right) \cdot l(e^{(0)}) \\ &\leq \left( \prod_{i=1}^j \frac{k_0}{2^i} \right) l(e^{(0)}) \\ &= k_0^j \cdot \prod_{i=1}^j \frac{1}{2^i} \cdot l(e^{(0)}) \\ &= \frac{k_0^j}{2^{(0.5 \cdot \sum_{i=0}^{j-1} i)}} \cdot l(e^{(0)}) \\ &= \frac{k_0^j}{2^{\frac{j(j-1)}{4}}} l(e^{(0)}) \end{aligned}$$

Setzt man  $l(e^{(n)}) = 1$  und  $k_0 = 0.1$  aus Lemma 4.7 und Lemma 4.9 bzw. Lemma 4.8 und Lemma 4.9 mit  $\alpha \leq 62$  analog zur Bestimmung des Beschränkungsfaktors im Beweis von Satz 5.4, so ist die längste Kante

$$\begin{aligned} l(e^{(0)}) &\geq 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot \left( \frac{1}{k_0} \right)^n l(e^{(n)}) \\ &\geq 2^{\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4} + n \cdot \log(10)} \\ &= 2^{\Omega(n^2)} \end{aligned}$$

□

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass ein vollständiger 5-regulärer Baum der Tiefe vier mit anschließenden 5-regulären Raupen der Länge  $O(n)$  nicht mit polynomiellem Platzbedarf als MST gezeichnet werden kann. Mit der oberen Flächenschranke von Monma und Suri (Satz 5.2) ist diese Graphenklasse mit der Fläche  $2^{\Theta(n^2)}$  als MST einzubetten.

Die betrachtete Graphenklasse ist eine Teilmenge der Graphenklasse mit 5-regulären Bäumen. Die Tiefe von Raupen beträgt  $O(n)$  und die Tiefe eines vollständigen 5-regulären Baumes ist  $O(\log n)$ . Also gilt auch für die Klasse der vollständig 5-regulären Bäume die untere Flächenschranke

$$2^{\Omega((\log n)^2)} = n^{\Omega(\log n)}.$$

Mit der oberen Flächenschranke von Monma und Suri (Satz 5.2) ist die Klasse der vollständigen 5-regulären Bäume ebenfalls mit höchstens  $2^{O(k^2)}$  Fläche als MST einzubetten, wobei  $k = O(\log n)$  die Tiefe der Bäume ist. Damit ergibt sich auch  $n^{\Theta(\log n)}$  als Flächenschranke.

Vollständige 4-näre Bäume unterscheiden sich von vollständigen 5-regulären Bäumen nur im Grad der Wurzel. Daher gilt für vollständige Bäume von Grad fünf auch die untere Schranke  $n^{\Omega(\log n)}$ . Mit der oberen Schranke von Monma und Suri kann ein vollständiger 4-närer Baum in  $n^{\Theta(\log n)}$  als MST eingebettet werden.

### Zusammenfassung der Platzschranken:

Grad	vollständiger Baum	beliebiger Baum
2	$O(n^2)$	–
3	$O(n^{4.3})$	$O(n^{11.387})$
4	$O(n^{5.6932})$	$O(n^{21.252})$
5	$n^{\Theta(\log n)}$	?
5	reg. Raupe: $2^{\Theta(n^2)}$	?
6	–	siehe Grad 5 $\Leftrightarrow$ Einbettung ist top. äquivalent zu Einbettung eines Baumes von Grad 5
$\geq 7$	–	–

In einem Baum muss jeder Knoten mindestens Grad zwei haben, weil der Graph anderenfalls nicht mehr zusammenhängend ist. Daher ist jeder Baum von Grad zwei vollständig.

Die oberen Flächenschränken für Grad zwei, drei und vier sind in Kapitel 3 aufgeführt. In Kapitel 5 und 6 ist die Flächenschränke für spezielle Klassen von Bäumen mit Grad fünf bewiesen. Ein beliebiger Baum von Grad fünf ist hier nicht untersucht worden. Für Bäume von Grad sechs gilt Lemma 3.9. Für alle Bäume mit höherem Grad gibt es keine MST-Einbettung.

In Kapitel 5 und 6 wurde die Möglichkeit zur Fortsetzung der Raupe allgemein gehalten. Möglicherweise ist die untere Flächenschränke bezüglich der Konstanten noch deutlicher, weil nicht jeder Raupe immer der Platz eingeräumt wird, den sie braucht. Sollte durch benachbarte Raupen im vollständigen 5-regulären Baum ab der Tiefe vier der Platz noch deutlicher beschränkt sein, so kann sich dies aufgrund von Monma und Suris oberer Schranke  $2^{O(n^2)}$  nur auf Konstanten auswirken. Dieser Sachverhalt wurde nicht mehr untersucht.

Bei einem beliebigen Baum von Grad fünf hängt die Platzschränke von der Anzahl der Knoten von Grad fünf ab. Ist beispielsweise nur ein Knoten von Grad fünf im Baum vorhanden, so kann der Baum als MST durchaus mit polynomiellem Platzbedarf eingebettet werden. Ist auf jeder Tiefe des Baumes allerdings ein Knoten von Grad fünf, dann ist eine MST-Einbettung nicht mehr mit polynomiellem Platzbedarf möglich. Die Klasse mit einem Knoten von Grad fünf auf jeder Tiefe stimmt genau mit der Klasse der 5-regulären Raupen überein. Es ist noch unbekannt, ob es eine größere Klasse gibt, für die man eine exponentielle untere Flächenschränke einer MST-Einbettung nachweisen kann.

Des Weiteren ist nicht geklärt, ob die Konstruktion des vollständigen 5-regulären Baumes der Tiefe vier als Ausgangssituation für die Raupe notwendig ist; d.h. man weiß noch nicht, ob man auch an beliebiger Stelle in einer Raupe Betrachtungen – wie in Kapitel 5 beschrieben – anstellen kann. Außerdem kann noch untersucht werden, ob in diesem Fall mit ähnlichen geometrischen Feststellungen wie in Kapitel 4 exponentieller Platzbedarf für die Raupe festgestellt werden kann. Um sicher zu sein müssten einige Hilfssätze noch verallgemeinert werden bzw. Voraussetzungen an die Winkel entsprechend angepasst werden.

Es ist zu erwarten, dass für die Argumentation in Kapitel 5 die Raupen nicht erst ab der Tiefe vier angehängt werden müssen. Nach Betrachtung der Wurzel liegen bereits zwei Winkel vor, die jeweils  $\leq 80$  und zusammen  $\leq 150$  sind. Die Größen der zwei Winkel genügen für die Anwendung von Lemma 4.11 um  $\beta \geq 80$  nach unten zu begrenzen. Dann ist  $\beta$  zwar auch nach oben beschränkt, nämlich durch  $\beta \leq 100$ , aber es ist weder Lemma 4.7 noch Lemma 4.8 anwendbar bezüglich der Beschränkung der adjazenten Kanten. Ein Winkel  $\alpha \leq 75$  impliziert einen Winkel  $\beta \geq 82.5$  und eine obere Schranke des gegenüberliegenden Winkels  $\beta' \leq 97.5$ . Die Tatsache, dass mindestens einer der

beiden Winkel  $\alpha, \alpha' \leq 67.5$  ( $= 0.5 \times 135$ ) ist und die obere Schranke 95.5 zur Anwendung von Lemma 4.8 ausreicht, führt bereits zu einer Längenbeschränkung der nachfolgenden Rückgrat-Kante um den Faktor 0.2. Die im Satz 5.4 beschriebenen zwei Fälle können in ihrer Voraussetzung bezüglich der Länge der vorherigen Rückgrat-Kante von dem Faktor 0.1 zu 0.2 erweitert werden. Allerdings ist dann noch zu untersuchen, ob für Fall 2 und damit für Lemma 4.10 und Lemma 4.12 die allgemeinere Voraussetzung  $l(e_1) \geq 5l(e)$  und die größeren Winkelschranken eingesetzt werden dürfen, sodass die Aussagen immernoch bestehen bleiben.

Die Schranken in Lemma 6.5 für  $\alpha'_i$  können zwar zu einem Spielraum  $\leq 15$  ausgedehnt werden, sodass Lemma 4.10 für Lemma 4.12 eine Beschränkung der Kante mit dem Faktor 0.4 liefert, aber bei einem so großem Spielraum sind die Längenbeschränkungen in der Voraussetzung von Lemma 4.12 nicht mehr naturgemäß gegeben. Daher sind nur die Voraussetzungen jener Lemmata verallgemeinert, bei denen es keine Kollisionen mit anderen Lemmata gibt. Zur Anwendung tritt letztendlich nur der spezielle Fall mit Spielraum  $\leq 2$  in Satz 6.8 auf.

Weil ab der Tiefe vier des vollständigen 5-regulären Baumes ein Knoten existiert, dessen anliegende Rückgrat-Kante durch das 0.1-fache der Länge der vorherigen Rückgrat-Kante beschränkt werden kann und die rückwirkende Voraussetzung von Lemma 4.11 ebenfalls eingehalten werden kann, wurde in dieser Arbeit der Anfang der Raupe auf die Tiefe vier gesetzt.

## 8 Literaturverzeichnis

### Literatur

- [BE] G. Di Battista, P. Eades, R. Tomassia, I. G. Tollis, *Graph Drawing – Algorithms for the visualization of graphs*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [CO] T. H. Cormen, C. H. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms* Second edition, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2001.
- [KF] F. Frati, M. Kaufmann, *Polynomial Area Bounds for MST Embeddings of Trees*, Technical Report RT-DIA-122-2008, Dept. of Computer Science and Automation, Roma Tre University, 2008.
- [KW] M. Kaufmann, D. Wagner, *Drawing Graphs – Methods and Models*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [KA] M. Kaufmann, *Polynomial area bounds for mst embeddings of trees*, in S.-H. Hong, T.Nishizeki, W. Quan, editors, *International Symposium on Graph Drawing*, volume 4875 of LNCS, Seite 88-100, 2007.
- [MS] C. L. Monma, S. Suri, Transitions in geometric minimum spanning trees, *Discrete & Computational Geometry*, 8: 265-293, Springer-Verlag, New York Inc., 1992.

## 9 Anhang – Wertetabellen

Im Folgende sind einige Wertetabellen aufgeführt, um im Ausblick erwähnte eventuelle Anpassungen an Voraussetzungen und Aussagen der Lemmata zu überprüfen. Insbesondere dienen diese Wertetabellen dem Aufstellen der Lemmata.

### Wertetabelle für Lemma 4.6

Für  $l(e) = 1$  beschreibt folgende Tabelle eine untere Schranke  $U$  für  $l(e_1)$  und eine obere Schranke  $O$  für  $l(e_1)$ . Dabei gilt

$$U = 2 \cdot \cos(\alpha) \text{ und } O = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)}.$$

Dabei wurden die  $U$ -Werte in der Tabelle abgerundet, die  $O$ -Werte aufgerundet und die Werte in der Tabelle bilden tatsächliche Schranken.

$\alpha$	U	O	$\alpha$	U	O	$\alpha$	U	O
60	1	1	70	0.684	1.462	80	0.347	2.880
61	0.969	1.032	71	0.651	1.536	81	0.312	3.197
62	0.938	1.066	72	0.618	1.619	82	0.278	3.593
63	0.907	1.102	73	0.584	1.711	83	0.243	4.103
64	0.876	1.141	74	0.551	1.814	84	0.209	4.784
65	0.845	1.184	75	0.517	1.932	85	0.174	5.737
66	0.813	1.230	76	0.483	2.067	86	0.139	7.168
67	0.781	1.280	77	0.449	2.223	87	0.104	9.554
68	0.749	1.335	78	0.415	2.405	88	0.069	14.327
69	0.716	1.396	79	0.381	2.621	89	0.034	28.650

Und für  $\alpha = 90$  ist  $U = 0$  und  $O = \infty$ .

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \alpha = 82.5 & : \frac{1}{4} < l(e_1) < 4 \\ \alpha = 80 & : \frac{1}{3} < l(e_1) < 3 \\ \alpha = 75.5 & : \frac{1}{2} < l(e_1) < 2 \end{aligned}$$

### Wertetabelle für Lemma 4.7

Die Werte für  $l(\alpha)$  und  $l'(\alpha)$  aus Lemma 4.7 sind in folgender Tabelle in Abhängigkeit von  $\alpha$  aufgeführt. Alle berechneten Werte sind aufgerundet und das Maximum von  $l(\alpha)$  und  $l'(\alpha)$  bildet die obere Schranke für  $l(e_2)$ . Zu beachten ist, dass für  $\alpha = 75$  die Bedingung  $\beta < 90$  notwendig ist, obwohl die Berechnungen für  $\beta = 90$  durchgeführt wurden.

$$l(\alpha) = \sin \alpha - \sqrt{\cos \alpha(2 - \cos \alpha)}$$

$$l'(\alpha) = \sqrt{2(1 - \cos(\alpha - 60))}$$

$\alpha$	$l(\alpha)$	$l'(\alpha)$	$\alpha$	$l(\alpha)$	$l'(\alpha)$
60	0	0	68	0.14688	0.13962
61	0.01755	0.01746	69	0.16657	0.15692
62	0.03529	0.03491	70	0.18666	0.17432
63	0.05323	0.05236	71	0.20719	0.19170
64	0.07141	0.06980	72	0.22819	0.20906
65	0.08984	0.08724	73	0.24972	0.22641
66	0.10854	0.10468	74	0.27185	0.24374
67	0.12755	0.12210	75	0.29463	0.26106

### Wertetabelle für Lemma 4.8

Sei  $60 \leq \alpha < 75, 90 < \beta < 240 - 2\alpha$ . Für

$$l(e_2) \leq l(\alpha) \cdot b(\alpha)$$

mit

$$b(\alpha) := \frac{\cos(\alpha) + \tan(\gamma) \sin(\alpha) - 1}{\sqrt{1 + \tan^2(\gamma)}} - \sqrt{\frac{(\cos(\alpha) + \tan^2(\gamma) + \tan(\gamma) \sin(\alpha))^2}{1 + \tan^2(\gamma)} - (\tan^2(\gamma) + 2 \tan(\gamma) \sin(\alpha))},$$

und  $\gamma = 180 - \beta$ .

gelten folgende  $l(e_2)$ -Beschränkungen. Alle  $l(e_2)$ -Werte sind aufgerundet.

$\alpha$	$\beta <$	$l(e_2) \leq$	$\alpha$	$\beta <$	$l(e_2) \leq$	$\alpha$	$\beta <$	$l(e_2) \leq$
60	120	0	65	110	0.132	70	100	0.227
61	118	0.030	66	108	0.154	71	98	0.242
62	116	0.058	67	106	0.174	72	96	0.257
63	114	0.84	68	104	0.193	73	94	0.270
64	112	0.109	69	102	0.210	74	92	0.283

Begrenzt man  $\beta$  wesentlich stärker als durch obige Schranke, so ist  $l(e_2)$  deutlich kleiner.

Sei  $\alpha \leq 75, \beta \leq S$  mit  $S = 180 - \beta =$  minimale obere Schranke. Falls  $\alpha' \leq 75$ , ist  $S = 60 + 0.5\alpha'$ . Dann gilt folgende Tabelle.



$\alpha$	$S$	$l(e_2) \leq$	$\alpha$	$S$	$l(e_2) \leq$	$\alpha$	$S$	$l(e_2) \leq$
60	90	0	65	92.5	0.0928	70	95	0.2033
61	90.5	0.0177	66	93	0.1131	71	95.5	0.2289
62	91	0.0357	67	93.5	0.1342	72	96	0.2562
63	91.5	0.0542	68	94	0.1562	73	96.5	0.2855
64	92	0.0732	69	94.5	0.1791	74	97	0.3173

Alle  $e_2$ -Werte sind aufgerundet.

### Wertetabelle für Lemma 4.10

Für  $x^* \in [0; 15]$  ergeben sich mit der Formel

$$x = \frac{\tan^2(2x^*) \cos(90 - x^*) + \tan(2x^*) \sin(90 - x^*) - 10}{1 + \tan^2(2x^*)} + \sqrt{t}$$

mit

$$t = \left( \frac{10 - \tan(2x^*) \sin(90 - x^*) - \tan^2(2x^*) \cos(90 - x^*)}{1 + \tan^2(2x^*)} \right)^2 - \frac{(\sin(90 - x^*) + \tan(2x^*) \cos(90 - x^*))^2}{1 + \tan^2(2x^*)}$$

und

$$l(e_2) \leq \frac{|x| + \cos(90 - x^*)}{\cos(2x^*)}$$

folgende Werte

$x^*$	$l(e_2) \leq$	$x^*$	$l(e_2) \leq$	$x^*$	$l(e_2) \leq$	$x^*$	$l(e_2) \leq$
0	0.0502	4	0.1226	8	0.2019	12	0.2938
1	0.0679	5	0.1416	9	0.2234	13	0.3196
2	0.0858	6	0.1611	10	0.2458	14	0.3470
3	0.1040	7	0.1811	11	0.2692	15	0.3760

### Wertetabelle für Lemma 4.11

$\beta \geq 120 - 0.5\alpha$  liefert folgende Wertepaare:

$\alpha$	$\beta \geq$	$\alpha$	$\beta \geq$	$\alpha$	$\beta \geq$	$\alpha$	$\beta \geq$
61	89.5	66	87.0	71	84.5	76	82.0
62	89.0	67	86.5	72	84.0	77	81.5
63	88.5	68	86.0	73	83.5	78	81.0
64	88.0	69	85.5	74	83.0	79	80.5
65	87.5	70	85.0	75	82.5	80	80.0